Universidade do Minho

UM ESTUDO DO OPERADOR SUPREMO SOBRE PSEUDOVARIEDADES DE SEMIGRUPOS

Dissertação submetida à Escola de Ciências da Universidade do Minho para obtenção do grau de Mestre em Matemática - Especialização em Ensino

Trabalho realizado sob a orientação do
Professor Doutor José Carlos Costa

Sílvia Filipa Gomes de Carvalho
2005

Ao Filipe

Agradecimentos

À minha família, por nunca me pedirem mais do que sou capaz de alcançar mas me incentivarem sempre a ir mais longe.

Ao meu orientador, Professor Doutor José Carlos Costa, por dar realmente significado ao papel que aceitou desempenhar neste trabalho, mas principalmente pela paciência, pelo incentivo e pelo entusiasmo com que pautou todas as nossas reuniões.

Por último, não poderia deixar de agradecer ao ISAVE, Instituto Superior de Saúde do Alto Ave, na pessoa do Professor Doutor Virgílio Alves, pelo incentivo constante e por me ter facilitado, tanto quanto possível, o serviço docente proporcionando-me boas condições para a elaboração deste trabalho.

Resumo

Motivada pelas aplicações em Informática, nomeadamente na teoria dos autómatos e linguagens racionais, a teoria dos semigrupos finitos tem obtido, desde os anos 70, cada vez mais atenção por parte dos investigadores. O seu tema central de estudo são as *pseudovariedades*, classes de semigrupos finitos fechadas para subsemigrupos, produtos directos finitos e imagens homomorfas.

Neste trabalho de síntese apresentamos um pequeno estudo do operador supremo, um dos operadores mais úteis no reticulado das pseudovariedades de semigrupos. O supremo $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ de duas pseudovariedades $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ é a menor pseudovariedade que contém ambas as pseudovariedades $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$. Não se pretende com este trabalho calcular exaustivamente todos os supremos já conhecidos, mas antes apresentar algumas das estratégias de cálculo de supremos mais utilizadas.

Este trabalho termina com uma tabela onde se sintetizam alguns dos resultados obtidos até ao momento, acerca de supremos das pseudovariedades mais conhecidas.

Abstract

Motivated by several algorithmic problems related with computer sciences, researchers have devoted attention to the study of the theory of finite semigroups, particularly since late 70's. Therefore, pseudovarieties (classes of finite semigroups closed under finite direct product, subsemigroup and homomorphic image) became objects of special consideration. The present dissertation is a small study of the join of two peudovarieties, one of the most important operators acting on pseudovarieties. The join of two pseudovarieties $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ is the smallest pseudovariety containing both $\mathbf{V}$ and $\mathbf{W}$.

In this study, we will not, obviously, compute every join of pseudovariety known at the present. We will, instead, present some of the most usual thecniques for doing join computations.

At the end of this dissertation we will present a table to sumarize some of the known results on joins of pseudovarieties.

Sumário

Introdução

A motivação principal para o estudo da teoria dos semigrupos finitos vem das ciências da computação. Nos anos 50, as linguagens racionais foram caracterizadas como sendo as que possuem semigrupos sintácticos finitos, possibilitando estudar as classes de linguagens racionais através dos seus semigrupos sintácticos.

Em meados dos anos 70, Eilenberg introduziu o conceito de *pseudovariedade*, classe de semigrupos finitos fechada para subsemigrupos, produtos directos finitários e imagens homomorfas. Esta noção permitiu-lhe formalizar a correspondência entre classes de semigrupos finitos e classes de linguagens racionais, ou seja, a uma pseudovariedade $\mathbf{V}$ associa a classe das linguagens racionais cujos semigrupos sintácticos estão em $\mathbf{V}$ e, reciprocamente, a uma variedade de linguagens $\mathcal{V}$ a pseudovariedade gerada por todos os semigrupos sintácticos de linguagens de $\mathcal{V}$.

A classe de todas as pseudovariedades forma um reticulado completo para a relação de inclusão. O nosso estudo incidirá sobre o operador supremo. O supremo de duas pseudovariedades é a mais pequena pseudovariedade que contém ambas. Apesar da sua definição simples este é um dos operadores que mais tem intrigado os investigadores. Diz-se que uma pseudovariedade $\mathbf{V}$ é decidível se existe um algoritmo que indique se determinado semigrupo finito pertence ou não a $\mathbf{V}$. Albert, Baldinger e Rhodes [1] mostraram recentemente que o problema do cálculo do supremo pode ser indecidível. Dadas duas pseudovariedades decidíveis $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ o seu supremo pode não ser decidível.

Não se pretende que este trabalho se resuma ao cálculo exaustivo de supremos de pseudovariedades. Vamos antes expôr algumas das principais estratégias que podem ser utilizadas no cálculo de supremos.

O trabalho está organizado do seguinte modo:

O primeiro capítulo é destinado a introduzir notações, definições e resultados básicos da teoria de semigrupos, que serão apresentados sem demonstrações. Para obter mais detalhes sugerem-se, por exemplo, os livros de Howie [25], Pin [26] e Almeida [5].

No capítulo 2 começamos por definir pseudovariedades de semigrupos. A segunda secção é dedicada às variedades de linguagens. Enuncia-se o Teorema de Eilenberg que define uma bijecção entre as variedades de linguagens e as pseudovariedades de semigrupos. Por último, estudam-se variedades de linguagens associadas a algumas pseudovariedades importantes que serão úteis no desenvolvimento deste trabalho. Como referência pode ser usado o livro de Pin [26].

No terceiro capítulo, depois de introduzirmos o conceito de operação implícita, enunciamos um teorema fundamental: o Teorema de Reiterman. Uma vez que uma das estratégias principais de cálculo de supremos envolve o conhecimento das operações implícitas sobre as pseudovariedades, dedicamos a última parte ao estudo das operações implícitas sobre algumas pseudovariedades, que utilizaremos nos capítulos seguintes.

No quarto capítulo começamos por definir supremo de pseudovariedades e apresentamos algumas estratégias utilizadas para efectuar os cálculos de supremos. O resto do capítulo é dedicado ao cálculo de pseudovariedades do tipo $\mathbf{G} \vee \mathbf{V}$, onde $\mathbf{G}$ é a pseudovariedade dos grupos e do tipo $\mathcal{L}\mathbf{I} \vee \mathbf{V}$ onde $\mathcal{L}\mathbf{I}$ é a pseudovariedade dos semigrupos localmente triviais e $\mathbf{V}$ é uma subpseudovariedade de $\mathbf{T} = [\![ab^\omega c = (ab^\omega c)^{\omega+1}]\!]$.

No capítulo 5, apresentamos mais alguns resultados sobre supremos de pseudovariedades e o rumo que a investigação nesta área vem desenvolvendo.

Por último, apresentamos dois apêndices. O apêndice A consiste de uma lista das principais pseudovariedades utilizadas ao longo deste trabalho, e respectivas pseudoidentidades. No apêndice B, apresentamos uma tabela construída a partir da que Zeitoun [32] apresentou tendo-se acrescentado alguns conhecimentos mais recentes.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Conjuntos Parcialmente Ordenados

Seja X um conjunto não vazio. Uma *ordem parcial em* X é uma relação binária $\leq$ em X, tal que para todos os $x, y, z \in X$,

- $x \leq x$;
- $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$;
- $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Estas condições são conhecidas, respectivamente, como *reflexividade*, *anti-simetria* e *transitividade*. Quando um conjunto X é munido de uma ordem parcial $\leq$ dizemos que $(X, \leq)$ é um *conjunto parcialmente ordenado* (c.p.o.), ou, quando tal não der origem a ambiguidade, simplesmente que X é um conjunto parcialmente ordenado.

Exemplo 1.1 *Seja* X *um conjunto qualquer.*

O conjunto das partes de X, $\mathcal{P}(X)$, *constituído por todos os subconjuntos de* X, *é um conjunto parcialmente ordenado: para* $A, B \in \mathcal{P}(X)$ *definimos* $A \leq B$ *se e só se* $A \subseteq B$.

Sejam X um c.p.o. e $x, y \in X$ tais que $x < y$. Dizemos que y *cobre* x, e denotamos $x \ll y$, se

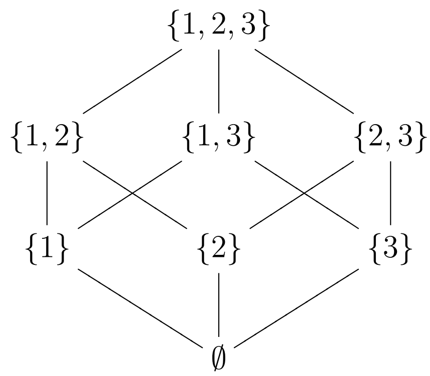
$$x \leq z \leq y \Rightarrow x = z \ \ ou \ \ z = y.$$

Por exemplo, em $\mathcal{P}(X)$, B cobre A se e só se $B = A \cup \{b\}$, para algum $b \in X \setminus A$.

Uma das características mais atractivas dos conjuntos parcialmente ordenados, pelo menos no caso finito, é a possibilidade de ser representado por um *Diagrama de Hasse*:

- cada elemento de X é representado por um ponto no plano;
- se $x, y \in X$ são tais que $x \ll y$, então o ponto que representa y é colocado acima do ponto que representa x e ligam-se estes dois pontos por um segmento de recta.

Exemplo 1.2 *O c.p.o.* $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$ *(conhecido como o cubo) pode ser representado através do seguinte diagrama:*



Um c.p.o. $(X, \leq)$ diz-se um *conjunto totalmente ordenado* ou *cadeia* se todos os seus elementos são comparáveis, i.e., $x \leq y$ ou $y \leq x$ para todos os $x, y \in X$.

Reticulados

Muitas propriedades importantes de um conjunto parcialmente ordenado X expressam-se em termos da existência de limites superiores ou inferiores de subconjuntos de X. Duas das mais importantes classes de conjuntos parcialmente ordenados são as dos *reticulados* e dos *reticulados completos*.

Sejam $(X, \leq)$ um c.p.o. e $Y \subseteq X$. Um elemento $m \in X$ diz-se um

- *majorante de* Y se, $\forall x \in Y$, $x \leq m$;
- *minorante de* Y se, $\forall x \in Y$, $m \leq x$;
- *supremo de* Y se é o menor dos majorantes de Y;
- *ínfimo de* Y se é o maior dos minorantes de Y;
- *máximo de* Y se $m \in Y$ e m é um majorante de Y;
- *mínimo de* Y se $m \in Y$ e m é um minorante de Y.

Note-se que caso exista, o supremo (respectivamente ínfimo, máximo e mínimo) de Y é único, e representa-se então por $\vee Y$ (respectivamente $\wedge Y$, max$Y$ e min$Y$). Por outro lado, caso exista, o elemento máximo (respectivamente mínimo de X) representa-se por 1 (respectivamente 0).

Seja X um conjunto parcialmente ordenado.

- Se $\vee \{x, y\}$ e $\wedge \{x, y\}$ existem, para todos os $x, y \in X$, dizemos que X é um *reticulado.*
- Se para todo o $Y \subseteq X$ existem $\vee Y$ e $\wedge Y$ chamamos a X um *reticulado completo.*

Exemplo 1.3 *Para qualquer conjunto A, o conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um reticulado completo no qual*

$$\vee \{A_i \mid i \in I\} = \bigcup_{i \in I} A_i \quad e \quad \wedge \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Num reticulado X representamos $x \wedge y$ e $x \vee y$ em vez de $\wedge \{x, y\}$ e $\vee \{x, y\}$, respectivamente, para quaisquer $x, y \in X$.

Seja X um reticulado e S um subconjunto não vazio de X. Diz-se que S é um *subreticulado* de X se S é fechado para as operações $\vee$ e $\wedge$, ou seja,

$$\forall x, y \in S, \quad x \vee y \in S \text{ e } x \wedge y \in S.$$

Definição 1.4 *Um* **reticulado** *(***algébrico***) é um triplo* $(X, \wedge, \vee)$ *onde* X *é um conjunto não vazio e* $\wedge$ *e* $\vee$ *são duas operações binárias, chamadas respectivamente* **ínfimo** *e* **supremo** *(abreviadamente inf e sup), que satisfazem os seguintes axiomas, para quaisquer* $a, b, c \in X$*:*

i. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$*; (leis associativas)*

ii. $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$*; (leis comutativas)*

iii. $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$*; (leis de idempotência)*

iv. $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$*. (leis da absorção)*

A relação entre reticulados (de ordem) e reticulados (algébricos) é a seguinte.

Teorema 1.5

1. *Seja* $(X, \leq)$ *um reticulado de ordem. Se definirmos, para quaisquer* $a, b \in X$*,*
$$a \wedge b = inf\{a, b\},\ a \vee b = sup\{a, b\},$$
então $(X, \wedge, \vee)$ *é um reticulado algébrico.*

2. *Seja* $(X, \wedge, \vee)$ *um reticulado algébrico. Se definirmos, para quaisquer* $a, b \in X$*,*
$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a,$$
então $(X, \leq)$ *é um reticulado de ordem.*

Álgebras de Boole

A noção de álgebra de Boole foi desenvolvida por George Boole em meados do sec. XIX. Apesar do estudo de Boole ter sido uma tentativa de formalizar o pensamento lógico, a sua teoria tornou-se, recentemente, uma componente essencial da Álgebra.

Definição 1.6 *Chamamos* **álgebra de Boole** *a uma estrutura algébrica* $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ *onde:*

(i) $\vee$ *e* $\wedge$ *são operações binárias definidas num conjunto* B*, tais que* $(B, \wedge, \vee)$ *é um reticulado que satisfaz*

$$\forall a, b, c \in B \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

(ii) $(B, \wedge, \vee)$ *tem um elemento mínimo* 0*;*

(iii) $(B, \wedge, \vee)$ *tem um elemento máximo* 1*;*

(iv) $'$ *é uma operação unária sobre* B *tal que para cada* $a \in B$*,*

$$a \wedge a' = 0 \quad e \quad a \vee a' = 1.$$

Exemplo 1.7 *Sejam* A *um conjunto e* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$*. Se* $\emptyset$*,* $A \in \mathcal{B}$ *e, para quaisquer* X*,* $Y \in \mathcal{B}$*,*

$$X \cup Y, \quad X \cap Y, \quad X' \in \mathcal{B},$$

onde $X' = A \backslash X$ *representa o complementar de* X *em* A*, então* $(\mathcal{B}, \cap, \cup, ', \emptyset, A)$ *é uma álgebra de Boole.*

1.2 Semigrupos

Um *grupóide* é definido como sendo um conjunto não vazio S no qual se define uma operação binária $\cdot$.

Se a operação $\cdot$ é associativa, ou seja, para todos os x, y, z pertencentes a S,

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

dizemos que $(S, \cdot)$ é um *semigrupo* .

Num semigrupo, expressões como $x \cdot y \cdot z$ podem ser interpretadas sem ambiguidade, uma vez que $\cdot$ é associativa, e podemos usar a notação $x^n (n \in \mathbb{N})$ para indicar o produto de n elementos todos iguais a x. Quando daí não resultar confusão escreveremos ainda xy em vez de $x \cdot y$ e S para designar o semigrupo $(S, \cdot)$. O número cardinal $|S|$ será designado a *ordem de* S.

Exemplo 1.8

1. *Os conjuntos* $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, ..., n-1\}$ *(*$n \in \mathbb{N}$*), munidos da relação de adição módulo* n*, são semigrupos finitos e* $|\mathbb{Z}_n| = n$*.*

2. *Dada uma família não vazia de semigrupos* $(S_i, \cdot_i)_{i \in I}$*, o seu* **produto directo** *é o semigrupo* $\left(\prod_{i \in I} S_i, \cdot\right)$ *cujo conjunto suporte é o produto cartesiano dos* S_i *com* $i \in I$ *e o produto é definido por*

$$(s_i)_{i \in I} \cdot (t_i)_{i \in I} = (s_i \cdot_i t_i)_{i \in I}.$$

   Em geral, denotaremos $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ *em vez de* $\prod_{i \in \{1, \ldots, n\}} S_i$*.*

3. *Sejam* A, B *subconjuntos de um semigrupo* S*. Então, define-se*

$$AB = \{ab \,:\, a \in A, b \in B\}.$$

   O conjunto $\mathcal{P}(S)$ *das partes de* S *munido da multiplicação definida acima é um semigrupo, chamado* **semigrupo das partes** *ou semigrupo potência de* S*.*

   Repare-se que as notações como $A \cdot B \cdot C$ *não causam ambiguidade. A confusão surge habitualmente com a notação* $A^2 = \{a_1 a_2 : a_1, a_2 \in A\}$ *que não deve ser confundida com o conjunto* $\{a^2 \,:\, a \in A\}$ *nem com* $A \times A$*.*

4. *Seja* $\mathcal{B}_X$ *o conjunto de todas as relações binárias num conjunto* X*. Define-se a operação binária* $\circ$ *em* $\mathcal{B}_X$ *de modo que para quaisquer* $\rho, \theta \in \mathcal{B}_X$*,*

$$\rho \circ \theta = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X,\, (x, z) \in \theta \;\; e \;\; (z, y) \in \rho\}.$$

   Tem-se que $(\mathcal{B}_X, \circ)$ *é um semigrupo.*

A um semigrupo $(M, \cdot)$ que contém um elemento e tal que, para todo o $x \in M$,

$$e \cdot x = x \cdot e = x$$

chamamos *monóide* . Existe, no máximo um elemento e com esta propriedade que chamaremos *(elemento) identidade* e denotaremos por 1 ou 1_M.

Se S é um semigrupo sem elemento identidade, se acrescentarmos ao conjunto S um elemento 1 e definirmos, para cada $s \in S$, $1s = s1 = s$ e $11 = 1$ então $S \cup \{1\}$ é um monóide. Assim, usaremos a notação S^1 com o seguinte significado

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{se S tem elemento identidade} \\ S \cup \{1\} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Chamamos a S^1 o *monóide obtido de S acrescentando a identidade se necessário.*

A um elemento z de um semigrupo S chamamos *(elemento) zero à esquerda* se, para todo o $x \in S$, $zx = z$. Dualmente, definimos *(elemento) zero à direita.* O *(elemento) zero*, que denotaremos por 0 ou 0_S, caso exista, é o único elemento que é simultaneamente zero à esquerda e à direita.

Um elemento e de um semigrupo S diz-se *idempotente* se $e = e^2$. Notemos que os elementos identidade e zero de um semigrupo, se existirem, são idempotentes. Denotaremos por $E(S) = \{e \in S : e^2 = e\}$ o conjunto dos idempotentes de S.

Um semigrupo S que verifique a condição

$$\forall a, b \in S \;\; \exists x, y \in S, \quad ax = b \;\; e \;\; ya = b$$

diz-se um *grupo.* Ou, de forma equivalente, um grupo é um monóide G em que todos os elementos admitem inverso , i.e.,

$$\forall x \in G \;\; \exists\, x^{-1} \in G, \quad x^{-1}x = xx^{-1} = 1_G.$$

Apresentamos agora a noção de *grupo das permutações de um conjunto* que nos será útil mais tarde.

Definição 1.9 *Seja $A = \{1, 2, ..., n\}$ um conjunto. Representaremos por S_n o conjunto de todas as permutações, ou seja, todas as aplicações bijectivas, de A em A. O par $(S_n, \circ)$ é um grupo, chamado* **grupo das permutações de** *A.*

Se $f \in S_n$, então f pode ser representado por

$$f = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & ... & i_n \\ f(i_1) & f(i_2) & ... & f(i_n) \end{pmatrix}$$

onde $\{i_1, i_2, ..., i_n\} = \{1, 2, ..., n\}$.
Se $f, g \in S_n$ representaremos $f \circ g$ por fg. Se

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{pmatrix} \quad e \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ j_1 & j_2 & ... & j_n \end{pmatrix}$$

então

$$fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_{j_1} & i_{j_2} & ... & i_{j_n} \end{pmatrix}.$$

Definição 1.10 *Sejam* $k, n \in \mathbb{N}$ *tais que* $2 \leq k \leq n$ *e seja* $\sigma \in S_n$*.*
Diz-se que σ *é um* **ciclo de comprimento** k *se existem inteiros distintos* $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ *tais que*

$$\sigma(i_1) = i_2,\ \sigma(i_2) = i_3, ...,\ \sigma(i_{k-1}) = i_k,\ \sigma(i_k) = i_1 \quad e \quad \sigma(j) = j$$

para todo o $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i_1, ..., i_k\}$*.*
Escreve-se, neste caso, $\sigma = (i_1\, i_2 \ldots i_k)$*.*

1.3 Subsemigrupos

Um subconjunto não vazio T de um semigrupo S diz-se um *subsemigrupo de* S, e denota-se $T \leq S$, se é fechado para a multiplicação, ou seja,

$$\forall x, y \in T, \quad xy \in T.$$

De modo equivalente T diz-se um subsemigrupo se $T^2 \subseteq T$.

No caso de S ser monóide dizemos que R é um *submonóide de* S se R é um subsemigrupo de S que contém o elemento identidade de S.

Um subsemigrupo V de S tal que V é um grupo diz-se um *subgrupo*. Verifica-se facilmente que um subconjunto não vazio V de S é um subgrupo se e só se, para todo o $a \in V$,

$$aV = Va = V.$$

Particular interesse surge no caso de subsemigrupos gerados por uma parte de um semigrupo. Quando A é um subconjunto não vazio de um semigrupo S, podemos pensar no menor (no sentido da inclusão) subsemigrupo de S que contém A. Este subsemigrupo existe sempre e pode ser obtido pela intersecção de todos os subsemigrupos de S que contêm A. Designamos este subsemigrupo por *subsemigrupo gerado por* A e notamo-lo por $\langle A\rangle$.

O subsemigrupo $\langle A\rangle$ consiste em todos os elementos de S que se podem escrever como produtos finitos de elementos de A. Se $\langle A\rangle = S$ dizemos que A é *um conjunto de geradores* de S.

Quando A é um conjunto singular $A = \{a\}$, escrevemos simplesmente $\langle a\rangle$ em vez de $\langle\{a\}\rangle$. Referimo-nos a $\langle a\rangle = \{a, a^2, a^3, ...\}$ como o *subsemigrupo monogénico* gerado pelo elemento a. Se $\langle a\rangle$ é um conjunto finito com n elementos, diz-se que o elemento a tem *ordem finita n*. Note-se que a ordem de a é definida como a ordem do subsemigrupo $\langle a\rangle$.

Caso não haja repetições na lista $a, a^2, a^3, ...$, isto é, se não existem naturais distintos k e l tais que $a^k = a^l$, então prova-se facilmente que $(\langle a\rangle, \cdot)$ é isomorfo ao semigrupo $(\mathbb{N}, +)$. Neste caso, dizemos que a tem *ordem infinita* em S.

Proposição 1.11 *Seja S um semigrupo e seja $a \in S$. Se a tem ordem finita n, então existem inteiros positivos únicos i (o* **índice** *de a) e p (o* **período** *de a) tais que:*

1. $\langle a\rangle = \{a, a^2, ..., a^i, a^{i+1}, ..., a^{i+p-1}\}$;
2. $a^i = a^{i+p}$;
3. *Os elementos $a, a^2, ..., a^{i+p-1}$ são todos distintos, ou seja, $n = i+p-1$;*
4. $K_a = \{a^i, ..., a^{i+p-1}\}$ *é um grupo cíclico cuja identidade, denotada por a^ω, é o único idempotente de $\langle a\rangle$.*

1.4 Homomorfismos

Sejam S e T dois semigrupos. Uma aplicação ϕ de S em T diz-se um *homomorfismo* ou *morfismo* (de semigrupos) se

$$\forall x, y \in S, \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

Se S e T são monóides, com elementos identidade 1_S e 1_T, respectivamente, pode definir-se *momorfismo de monóides* como um morfismo de semigrupos $\phi : S \longrightarrow T$ tal que $\phi(1_S) = 1_T$.

Sejam S e T dois semigrupos. Um homomorfismo ϕ de S em T diz-se um:

- *monomorfismo* se ϕ é uma aplicação injectiva.
- *epimorfismo* se ϕ é uma aplicação sobrejectiva. Neste caso, dizemos que T é *imagem homomorfa* de S.
- *isomorfismo* se ϕ é uma aplicação bijectiva. Dizemos então que S é *isomorfo* a T e denotamos $S \simeq T$.

Em geral, identificaremos dois semigrupos isomorfos.

Se T é imagem homomorfa de algum subsemigrupo de S dizemos que T *divide* S, e denotamos $T \prec S$.

Proposição 1.12 *Seja $\phi : S \longrightarrow T$ um homomorfismo de semigrupos.*

1. *Se $S' \leq S$, então $\phi(S') \leq T$.*
2. *Se $T' \leq T$ e $\phi^{-1}(T') \neq \emptyset$, então $\phi^{-1}(T') \leq S$.*

Devido a este resultado faz sentido usar, por vezes, a seguinte definição de subsemigrupo: S é *subsemigrupo* de T se existe um monomorfismo de S em T.

1.5 Ideais e Congruências

Um subconjunto I não vazio de um semigrupo S diz-se um *ideal* de S se para quaisquer $s \in S$ e $i \in I$ se tem $is, si \in I$, ou seja, $S^1 I S^1 \subseteq I$. Notamos $I \trianglelefteq S$.

Um *ideal esquerdo* (respectivamente *direito*) é um subconjunto I não vazio de S em que, para quaisquer $s \in S$ e $i \in I$ se tem $si \in I$ (respectivamente $is \in I$).

Exemplo 1.13 *Se a é um elemento de um semigrupo S, o mais pequeno ideal à esquerda de S que contém a é $Sa \cup \{a\}$ que é igual a S^1a. De forma semelhante, definimos aS^1.*

Um ideal I diz-se um *ideal minimal* de S se sempre que J é um ideal de S e $J \subseteq I$ se tem $J = I$. Um ideal minimal, se existir, é único, e dizemos que é o *ideal mínimo de S*, também chamado o *núcleo de S*. Note-se que o grupo K_a referido na Proposição 1.11 é o núcleo de $\langle a \rangle$.

A existência deste está assegurada em dois casos importantes.

Exemplo 1.14

1. *Se S é um semigrupo finito, então facilmente se prova que o produto de todos os ideais de S é o ideal mínimo de S.*

2. *Se S é um semigrupo com elemento zero, então $\{0\}$ é o ideal mínimo de S.*

Uma relação de equivalência ρ sobre um semigrupo S diz-se uma *congruência à esquerda* se

$$\forall s, t, a \in S, \quad s \, \rho \, t \Rightarrow as \, \rho \, at.$$

Uma relação de equivalência ρ sobre um semigrupo S diz-se uma *congruência à direita* se

$$\forall s, t, a \in S, \quad s \, \rho \, t \Rightarrow sa \, \rho \, ta.$$

Uma relação de equivalência ρ sobre um semigrupo S diz-se uma *congruência* se

$$\forall s, t, s', t' \in S, \quad s \, \rho \, t \;\; e \;\; s' \, \rho \, t' \Rightarrow ss' \, \rho \, tt'.$$

Proposição 1.15 *Uma relação de equivalência sobre um semigrupo S é uma congruência se e só se é simultaneamente uma congruência à esquerda e à direita.*

Seja S um semigrupo e ρ uma congruência em S. O conjunto quociente S/ρ pode ser munido da operação binária associativa definida, para quaisquer $a, b \in S$, por

$$(a/\rho)\,(b/\rho) = (ab)/\rho$$

A este semigrupo chamamos o *semigrupo quociente* de S em relação a ρ, ou simplesmente o semigrupo quociente quando tal não origine ambiguidade.

A aplicação $\pi : S \longrightarrow S/\rho$, definida por $\pi(a) = a/\rho$ para cada $a \in S$, é um epimorfismo, chamado o *epimorfismo canónico de S para S/ρ.*

Exemplo 1.16

1. *Para um semigrupo S e um ideal I de S, definimos a* **congruência de Rees sobre** S **de núcleo** I *pondo, para quaisquer $a, b \in S$,*

$$a \sim_I b \quad \Leftrightarrow \quad a = b \quad ou \quad a, b \in I.$$

   O semigrupo quociente $S/\sim_I$ denota-se usualmente por S/I.

2. *Seja $\varphi : S \longrightarrow T$ um homomorfismo. Então a relação $\sim_\varphi$ definida, para quaisquer $x, y \in S$ por:*

$$x \sim_\varphi y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$$

   é uma congruência sobre S e diz-se a **congruência nuclear** *de φ.*

Prova-se facilmente que a intersecção de uma família de equivalências sobre um conjunto X, é ainda uma equivalência sobre X. Seja ρ uma relação binária sobre X. A família de equivalências sobre X que contêm ρ é não vazia. Assim, a intersecção de todas as equivalências sobre X que contêm ρ é ainda uma equivalência, a mais pequena equivalência sobre X que contém ρ. Chamamos-lhe a *equivalência gerada por ρ* e denotamo-la por ρ^e.

Consideremos agora duas equivalências θ e ρ sobre X. A equivalência gerada por $\rho \cup \theta$ denota-se por $\rho \vee \theta$, isto é,

$$\rho \vee \theta = (\rho \cup \theta)^e.$$

Na próxima secção vamos necessitar de efectuar cálculos do tipo $\rho \vee \theta$. A proposição seguinte facilita significativamente este cálculo.

Proposição 1.17 *Se ρ e θ são duas relações de equivalência num conjunto X que comutam relativamente à composição, então $\rho \vee \theta = \rho \circ \theta$.*

1.6 Relações de Green

Em 1951, J. A. Green introduziu as relações (posteriormente designadas) de Green, que desempenham um papel fundamental no desenvolvimento da teoria de semigrupos. Em particular, elas podem ser utilizadas para definir certas classes importantes de semigrupos.

Num semigrupo S, as relações de Green, denotadas por $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}, \mathcal{H}$ e $\mathcal{D}$, são cinco relações de equivalência sobre S.

Comecemos por definir três delas: para $a, b \in S$,

- $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow aS^1 = bS^1$;
- $a\mathcal{L}b \Leftrightarrow S^1a = S^1b$;
- $a\mathcal{J}b \Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1$.

As duas restantes relações de Green ($\mathcal{H}$ e $\mathcal{D}$), são definidas através das relações $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L} \ \text{ e } \ \mathcal{D} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L}$$

Como é evidente são válidas as seguintes inclusões entre as relações de Green

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}, \mathcal{L} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}.$$

Uma caracterização alternativa muito útil das relações $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ é dada no lema seguinte.

Lema 1.18 *Sejam a, b elementos de um semigrupo S. Então:*

1. *$a\mathcal{L}b$ se e só se existem $x, y \in S^1$ tais que $xa = b, yb = a$;*
2. *$a\mathcal{R}b$ se e só se existem $u, v \in S^1$ tais que $au = b, bv = a$.*

Outro resultado bastante útil é o seguinte.

Proposição 1.19 *Para qualquer semigrupo S as relações $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ comutam. Ou seja, $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$.*

Temos pois duas relações de equivalência que comutam relativamente à composição. Portanto podemos utilizar a Proposição 1.17 para obter uma caracterização mais simples da relação $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}.$$

Apresentamos agora mais um resultado que assume um papel relevante no estudo dos semigrupos finitos.

Proposição 1.20 *Num semigrupo finito, $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.*

Importa fixar notações que, no que se refere às relações de Green, serão ligeiramente diferentes das usuais. Se $\mathcal{K}$ é uma das relações de Green, denotamos a $\mathcal{K}$-classe de a por K_a.

Diz-se que um semigrupo S é:

- $\mathcal{K}$-*trivial* se $\mathcal{K}$ é a relação de igualdade em S, isto é, $K_a = \{a\}$ para todo o elemento $a \in S$;
- $\mathcal{K}$-*universal* se $\mathcal{K}$ é a relação universal em S, isto é, $K_a = S$ para todo o elemento $a \in S$.

Uma vez que as relações de Green são definidas à custa de ideais, a inclusão entre aqueles induz uma *ordem parcial* sobre o conjunto das classes de equivalência:

- $L_a \leq L_b$ se $S^1a \subseteq S^1b$;
- $R_a \leq R_b$ se $aS^1 \subseteq bS^1$;
- $J_a \leq J_b$ se $S^1aS^1 \subseteq S^1bS^1$.

Note-se que, para todo o $a \in S$ e para todos os $x, y \in S^1$,

$$L_{xa} \leq L_a, \quad R_{ax} \leq R_a, \quad J_{xay} \leq J_a.$$

A Estrutura das $\mathcal{D}$-classes

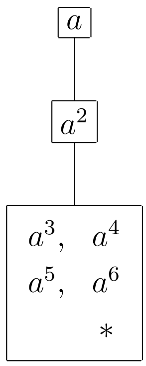
Para melhor compreender as relações de Green podemos visualizá-las como o que Clifford e Preston [18] chamaram de *caixa de ovos*. Esta imagem é possível uma vez que cada $\mathcal{D}$-classe num semigrupo S é, simultaneamente, uma união de $\mathcal{L}$-classes e uma união de $\mathcal{R}$-classes. E ainda, a intersecção de uma $\mathcal{L}$-classe e de uma $\mathcal{R}$-classe ou é vazia ou é uma $\mathcal{H}$-classe.

Assim, numa "caixa de ovos", que representa uma $\mathcal{D}$-classe, cada linha simboliza uma $\mathcal{R}$-classe, cada coluna uma $\mathcal{L}$-classe e cada célula uma $\mathcal{H}$-classe.

Para indicar que uma dada $\mathcal{H}$-classe contém um idempotente, é costume representar um asterisco na célula correspondente a essa $\mathcal{H}$-classe.

Note-se que uma "caixa de ovos" pode, obviamente, ter apenas uma linha ou apenas uma coluna ou até uma única célula. Pode ainda ser uma "caixa de ovos" infinita.

Exemplo 1.21 *Seja $A = \langle a \rangle$ um semigrupo monogénico gerado por a. Consideremos que a tem ordem finita com índice 3 e período 4. A estrutura das $\mathcal{D}$-classes de A é representada por*



Lema 1.22 (Green) *Sejam a, b elementos $\mathcal{R}$-equivalentes de um semigrupo S e sejam $r, s \in S^1$ tais que $ar = b$ e $bs = a$. Então as correspondências*

$$\begin{array}{rcccl} \rho_r & : & L_a & \longrightarrow & L_b \\ & & x & \longmapsto & xr \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcccl} \rho_s & : & L_b & \longrightarrow & L_a \\ & & x & \longmapsto & xs \end{array}$$

são aplicações bijectivas mutuamente inversas que preservam as $\mathcal{H}$-classes, isto é, para todos os $x, y \in L_a$ (resp. $x, y \in L_b$),

$$x\mathcal{H}y \text{ se e só se } \rho_r(x)\mathcal{H}\rho_r(y) \quad (\text{resp. } \rho_s(x)\mathcal{H}\rho_s(y)).$$

Prova: Vamos começar por provar que ρ_r é, de facto, uma aplicação de L_a em L_b. Seja $x \in L_a$. São válidas as implicações:

$$x \in L_a \Rightarrow x\mathcal{L}a \Rightarrow S^1x = S^1a \Rightarrow S^1xr = S^1ar \Rightarrow xr\mathcal{L}ar \Rightarrow \rho_r(x) \in L_b.$$

Portanto ρ_r está bem definida. Além disso, existe $t \in S^1$ tal que $x = ta$, pelo que

$$\rho_s \circ \rho_r(x) = \rho_s(xr) = xrs = tars = tbs = ta = x,$$

donde se tira que $\rho_s \circ \rho_r$ é a aplicação identidade sobre L_a. Através de idêntico raciocínio facilmente se prova também que ρ_s é uma aplicação de L_b em L_a e que $\rho_r \circ \rho_s$ é a aplicação identidade sobre L_b.

Vamos agora mostrar que ρ_r preserva as $\mathcal{H}$-classes. Sejam $x, y \in L_a$ tais que $x\mathcal{H}y$. Então $x\mathcal{L}y$, donde $xr\mathcal{L}yr$. Por outro lado, como $x = xrs$ e $y = yrs$, donde $x\mathcal{R}xr$ e $y\mathcal{R}yr$. Como $x\mathcal{R}y$ conclui-se que $xr\mathcal{R}yr$. Reciprocamente, admitindo que $xr\mathcal{H}yr$, deduz-se que $x = xrs\mathcal{H}yrs = y$. $\square$

Este resultado tem claramente um dual que enunciamos em seguida.

Lema 1.23 (Green(dual)) *Sejam a, b elementos $\mathcal{L}$-equivalentes de um semigrupo S e sejam $r, s \in S^1$ tais que $ra = b$ e $sb = a$. Então as correspondências*

$$\begin{array}{rcrcl} \lambda_r & : & R_a & \longrightarrow & R_b \\ & & x & \longmapsto & rx \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcrcl} \lambda_s & : & R_b & \longrightarrow & R_a \\ & & x & \longmapsto & sx \end{array}$$

são aplicações bijectivas mutuamente inversas que preservam as $\mathcal{H}$-classes.

Dos lemas anteriores retiram-se algumas consequências importantes que se prendem com a multiplicação numa $\mathcal{H}$-classe.

Teorema 1.24 (Green) *Se H é uma $\mathcal{H}$-classe num semigrupo S, então ou $H^2 \cap H = \emptyset$ ou $H^2 = H$ e, neste caso, H é subgrupo de S.*

Corolário 1.25 *Se e é um idempotente de um semigrupo S, então H_e é um grupo. Nenhuma $\mathcal{H}$-classe de S pode conter mais do que um idempotente.*

Note-se que todo o semigrupo finito S tem uma $\mathcal{J}$-classe mínima (em relação à ordem parcial definida sobre $\mathcal{J}$-classes). Esta $\mathcal{J}$-classe mínima J é o ideal mínimo de S, como se pode provar. Apoiados no teorema anterior, podemos afirmar que J é constituída por $\mathcal{H}$-classes que são grupos. De facto, suponhamos que H é uma $\mathcal{H}$-classe e que $H \subseteq J$. Então se $H^2 = H$, H é grupo. Se existem $a, b \in H$ tais que $ab \notin H$ então prova-se que $J_{ab} < J_a$ o que é absurdo porque J é mínima.

Para terminar a secção indicamos certas classes de semigrupos que, como havíamos dito no início, podem ser definidas ou caracterizadas através das relações de Green. Por exemplo, mostra-se que um semigrupo S é um grupo se e só se $\mathcal{H}$ é a relação universal sobre S.

Definição 1.26 *Um semigrupo S diz-se:*

1. **aperiódico** *se $\mathcal{H}$ é a relação trivial sobre S;*

2. **simples** *se $\mathcal{J}$ é a relação universal sobre S;*

3. **completamente regular** *se toda a $\mathcal{H}$-classe é um grupo.*

1.7 Alguns Semigrupos Importantes

Nesta secção estudaremos algumas classes bem conhecidas e importantes de semigrupos.

Semigrupos Nilpotentes

Já tínhamos visto que, dado um semigrupo S, um idempotente é um elemento $e \in S$ tal que $e^2 = e$.

Para cada elemento $s \in S$ define-se n_s como sendo (caso exista) o menor número natural n tal que s^n é um idempotente. No caso dos semigrupos finitos, que estudaremos no próximo capítulo, a existência de n_s está assegurada.

Proposição 1.27 *Se S é um semigrupo finito e $a \in S$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que a^k é idempotente.*

Prova: Basta notar que, pela Proposição 1.11, K_a é um grupo e, por isso, tem identidade. Ora a identidade é um idempotente. □

Corolário 1.28 *Se S é um semigrupo finito, então S tem pelo menos um idempotente.*

Se, para um semigrupo finito S, tomarmos $n = m.m.c.\{n_s : s \in S\}$, então n é o menor inteiro positivo tal que para qualquer $s \in S$, s^n é um idempotente. A n chamamos o *expoente de S*.

O resultado seguinte mostra que, num semigrupo finito, os idempotentes intervêm necessariamente em produtos com "muitos" factores.

Proposição 1.29 *Sejam S um semigrupo finito e $|S|$ o seu cardinal. Então*

$$\forall n \geq |S|, \quad S^n = SE(S)S.$$

Estamos agora em condições de definir a classe de semigrupos que estudaremos adiante, bem como enunciar um resultado que será útil na sua caracterização. Este último prova-se facilmente recorrendo ao que foi exposto anteriormente.

Definição 1.30 *Um semigrupo S diz-se* **nilpotente** *se*

$$\forall e \in E(S) \ \ \forall s \in S, \quad es = se = e.$$

Isto é, S é nilpotente se tem um único idempotente e esse idempotente é elemento zero.

Proposição 1.31 *Para um semigrupo finito S as seguintes condições são equivalentes:*

1. *S é nilpotente;*

2. *S possui elemento zero e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^n = 0$;*

3. $\exists n \in \mathbb{N} \ \ \forall x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in S, \quad x_1 x_2 \ldots x_n = y_1 y_2 \ldots y_n.$

A caracterização dos semigrupos nilpotentes em termos das relações de Green vai permitir demonstrar alguns resultados mais à frente.

Seja S um semigrupo nilpotente. Provemos que as $\mathcal{J}$-classes de S são singulares. De facto, suponhamos, por redução ao absurdo, que existem dois elementos distintos a e b de S tais que $b \in J_a$. Tem-se que

$$\exists x, y, u, v \in S^1, \quad a = xby \quad e \quad b = uav$$

em que $x \neq 1$ ou $y \neq 1$ (respectivamente $u \neq 1$ ou $v \neq 1$).

Então $b = uxbyv$ e, iterando a substituição, $b = (ux)^\omega b(yv)^\omega$. Se $u \neq 1$, então $(ux)^\omega = 0$ e $b = 0$. Senão $v \neq 1$ e portanto $(yv)^\omega = 0$ e $b = 0$. Da mesma forma se prova que $a = 0$ donde $a = b$, o que é absurdo. Logo cada $\mathcal{J}$-classe de S tem apenas um elemento.

Em particular, a $\mathcal{J}$-classe minimal J de S tem apenas um elemento e. É consequência imediata do Exemplo 1.14 que e é o (elemento) zero.

Semigrupos Localmente Triviais

Um semigrupo S diz-se *localmente trivial* se,

$$\forall e \in E(S) \ \ \forall s \in S, \quad ese = e.$$

A proposição seguinte permite caracterizar os semigrupos localmente triviais finitos.

Proposição 1.32 *Seja S um semigrupo finito. As condições seguintes são equivalentes:*

1. *S é localmente trivial;*
2. *$E(S)$ é o ideal mínimo de S;*
3. *para cada $e, f \in E(S)$ e para cada $s \in S$, temos que $esf = ef$.*

No que concerne as relações de Green, as $\mathcal{J}$-classes não minimais dos semigrupos localmente triviais são singulares bastando, para o demonstrar, adaptar a prova efectuada para os semigrupos nilpotentes. Pela proposição anterior, a $\mathcal{J}$-classe minimal é constituída pelos idempotentes do semigrupo, pelo que todas as suas $\mathcal{H}$-classes são grupos triviais.

Bandas

Um semigrupo formado apenas por elementos idempotentes diz-se uma *banda*. Os exemplos mais simples de bandas não triviais são as bandas comutativas conhecidas como *semi-reticulados*.

Por *banda rectangular* entende-se um semigrupo, cujo conjunto suporte é da forma $I \times J$, onde I e J são conjuntos não vazios, munido da operação definida, para todos os $i, i' \in I$ e $j, j' \in J$, por

$$(i,j)(i',j') = (i,j').$$

Para entendermos o termo rectangular basta imaginar (i,j) e (i',j') como pontos do plano cartesiano. Os produtos (i,j') e (i',j) seriam colocados nos vértices do rectângulo cujos outros vértices seriam (i,j) e (i',j').

Estes semigrupos são obviamente bandas.

Semigrupos Regulares

Um elemento a de um semigrupo S diz-se *regular* se existe $x \in S$ tal que $axa = a$. Quando todos os elementos de um semigrupo são regulares dizemos que se trata de um *semigrupo regular*. É o caso dos grupos que são claramente semigrupos regulares e ainda das bandas rectangulares.

Sejam S um semigrupo e $a \in S$. Dizemos que a' é um *inverso* de a se

$$aa'a = a \quad e \quad a'aa' = a'.$$

Note-se que esta noção de inverso é mais geral do que a de inverso na teoria de grupos. De facto, neste caso, um elemento pode ter mais do que um inverso, como acontece, por exemplo, nas bandas rectangulares.

As $\mathcal{D}$-classes regulares de um semigrupo podem ser caracterizadas através da seguinte proposição.

Proposição 1.33 *Seja D uma $\mathcal{D}$-classe de um semigrupo S. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- *D é regular;*
- *D contém algum elemento regular;*
- *cada $\mathcal{R}$-classe de D contém algum idempotente;*
- *cada $\mathcal{L}$-classe de D contém algum idempotente;*
- *D contém algum idempotente;*
- *existem $a, b \in D$ tais que $ab \in D$.*

1.8 Linguagens

Dado um conjunto finito não vazio A, dizemos que A é um *alfabeto* e aos seus elementos chamamos *letras*. Às sucessões finitas de letras $a_1 a_2 ... a_n$ chamamos *palavras*.

Consideremos

$$A^+ = \{a_1 a_2 ... a_n : n \in \mathbb{N},\ a_i \in A \ \ para \ \ i = 1, ..., n\}.$$

Este conjunto munido da operação binária *concatenação de palavras* definida por

$$(a_1 a_2 ... a_n)(b_1 b_2 ... b_m) = a_1 a_2 ... a_n b_1 b_2 ... b_m$$

para todos $n, m \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m \in A$ é um semigrupo chamado *semigrupo livre gerado por A*. A justificação desta designação encontra-se na seguinte proposição:

Proposição 1.34 *Seja S um semigrupo e $\iota : A \longrightarrow A^+$ a aplicação inclusão. Para qualquer aplicação $\varphi : A \longrightarrow S$ existe um único morfismo de semigrupos $\bar{\varphi} : A^+ \longrightarrow S$ tal que o diagrama seguinte comuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & A^+ \arrow[d, "\bar{\varphi}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

Repare-se que, podemos construir $\bar{\varphi}$ tomando para cada $u = a_1 a_2 ... a_n$, palavra de A^+,

$$\bar{\varphi}(u) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)...\varphi(a_n).$$

A $\bar{\varphi}$ chamamos *prolongamento natural de* φ *a* A^+.

Se a A^+ acrescentarmos um elemento 1 (a palavra vazia), obtemos o *monóide livre* sobre A o qual denotamos por A^*.

Se u é uma palavra, $|u|$ representa o *comprimento de* u, ou seja,

$$|u| = \begin{cases} 0 & se \quad u \; = \; 1 \\ k & se \quad u \; = \; a_1 \dots a_k, \qquad a_i \in A,\, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

O *conteúdo de* u, isto é, o conjunto de todas as letras que ocorrem em u representa-se por $c(u)$. Dada uma letra a, representamos por $|u|_a$ o número de ocorrências de a em u.

Sejam u e v duas palavras de A^*. Diz-se que

- u é um *factor* de v se existem $a, b \in A^*$ tais que $v = aub$;
- u é um *prefixo* de v se existe $b \in A^*$ tal que $v = ub$;
- u é um *sufixo* de v se existe $a \in A^*$ tal que $v = au$.

Uma *palavra infinita à direita* sobre um alfabeto A é uma sucessão de letras de A indexadas por $\mathbb{N}$, ou seja, é uma aplicação de $\mathbb{N}$ sobre A. Notamos $A^{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as palavras infinitas à direita sobre A. Dualmente definimos *palavra infinita à esquerda* sobre A como uma sucessão de letras de A indexadas por $-\mathbb{N}$. O conjunto de todas as palavras infinitas à esquerda sobre A, será notado por $A^{-\mathbb{N}}$.

Chamamos *linguagens sobre* A aos subconjuntos de A^*. Assim $\mathcal{P}(A^*)$ é o conjunto de todas as linguagens sobre A.

Definição 1.35 *Dados um alfabeto A e as linguagens L, K de A^*, definimos:*

(i) **o produto de concatenação de L por K:**

$$LK = \{uv \in A^* |\, u \in L \,e\, v \in K\}$$

(ii) **o subsemigrupo de** A^* **gerado por** L*:*

$$L^+ = \{u_1u_2...u_n \, | n \in \mathbb{N}, u_i \in L, i = 1, 2, ..., n\}$$

(iii) **o submonóide de** A^* **gerado por** L*:*

$$L^* = L^+ \cup \{1\}$$

(iv) **o quociente à esquerda de** L **por** K*:*

$$K^{-1}L = \{v \in A^* | \exists u \in K : uv \in L\}$$

(v) **o quociente à direita de** L **por** K*:*

$$LK^{-1} = \{v \in A^* | \exists u \in K : vu \in L\}$$

Não distinguiremos, quando tal não der origem a ambiguidades, a palavra u da linguagem $\{u\}$. Consequentemente, escreveremos $u^{-1}L$ e Lu^{-1} em vez de $\{u\}^{-1}L$ e $L\{u\}^{-1}$, respectivamente.

Definição 1.36 *Seja L uma linguagem sobre A.*

(i) A **congruência sintáctica de** L **sobre** A^+ *é definida por,*

$$u \sim_L v \Longleftrightarrow (\forall x, y \in A^*, \quad xuy \in L \Leftrightarrow xvy \in L).$$

Note-se que $\sim_L$ é, de facto, uma congruência.

(ii) O **semigrupo sintáctico de** L *é o semigrupo quociente $S(L) = A^+/\sim_L$.*

(iii) O epimorfismo canónico $\eta_L : A^+ \to S(L)$ é chamado o **morfismo sintáctico de** L*.*

Definição 1.37 *Seja A um alfabeto e $L \subseteq A^+$. Se existem um morfismo de semigrupos $\eta : A^+ \to S$ e $P \subseteq S$ tais que*

$$\eta^{-1}(P) = L,$$

dizemos que L é reconhecida pelo morfismo η, ou ainda, que L **é reconhecida pelo semigrupo** S*.*

Se uma linguagem L é reconhecida por um semigrupo finito então diz-se **reconhecível por semigrupos***.*

A seguinte proposição mostra que o semigrupo sintáctico de uma linguagem L é o mais pequeno semigrupo que reconhece L.

Proposição 1.38 *Seja L uma linguagem de A^+. Um semigrupo T reconhece L se e só se $S(L)$ divide T.*

Acabamos esta secção com uma proposição que se demonstra facilmente e será útil mais à frente.

Proposição 1.39 *Sejam L, L_1, L_2 linguagens reconhecíveis de A^+. Então:*

1. $S(A^+ \setminus L) = S(L)$;
2. $S(L_1 \cap L_2) \prec S(L_1) \times S(L_2)$;
3. $S(L_1 \cup L_2) \prec S(L_1) \times S(L_2)$.

Capítulo 2

Pseudovariedades

2.1 Definição

Deve-se a Birkhoff o conceito de *variedade*. Uma *variedade de semigrupos* é uma classe de semigrupos fechada para a divisão e para produtos directos, que assume um papel de destaque no estudo dos semigrupos.

Em 1976, Eilenberg introduziu um conceito análogo ao de variedade: *pseudovariedade de semigrupos* (também chamada variedade de semigrupos finitos) que será objecto de estudo deste trabalho.

Definição 2.1 *Uma* **pseudovariedade (de semigrupos)** *é uma classe não vazia de semigrupos finitos,* $\mathbf{V}$*, tal que:*

- *se* $S \in \mathbf{V}$ *e* $T \leq S$*, então* $T \in \mathbf{V}$*;*
- *se* $S \in \mathbf{V}$ *e* $\varphi : S \to T$ *é um epimorfismo de semigrupos, então* $T \in \mathbf{V}$*;*
- *se* $(S_i)_{i\in I}$ *é uma família finita não vazia de elementos de* $\mathbf{V}$*, então* $\prod_{i\in I} S_i \in \mathbf{V}$*.*

Mais sucintamente, $\mathbf{V}$ é uma pseudovariedade se é fechada para divisão e para produtos directos finitos. Note-se que esta definição, ao contrário da definição de variedade de semigrupos, só autoriza produtos finitos.

Damos de seguida alguns exemplos de pseudovariedades, algumas das quais utilizaremos nos capítulos subsequentes.

1. $\mathbf{S}$, a classe de todos os semigrupos finitos;
2. $\mathbf{I}$, a classe constituída pelos semigrupos com um único elemento;
3. $\mathbf{G}$, a classe de todos os grupos finitos;
4. $\mathbf{Sl}$, a classe de todos os semi-reticulados finitos;
5. $\mathbf{Com}$, a classe de todos os semigrupos comutativos finitos;
6. $\mathbf{N}$, a classe de todos os semigrupos nilpotentes finitos;
7. $\mathcal{L}\mathbf{I}$, a classe de todos os semigrupos localmente triviais finitos;
8. $\mathbf{K}$, a classe dos semigrupos finitos S tais que $es = e$ para todos os $e \in E(S)$ e $s \in S$;
9. $\mathbf{D}$, a classe dos semigrupos finitos S tais que $se = e$ para todos os $e \in E(S)$ e $s \in S$.

Como é evidente nem todas as classes de semigrupos finitos respeitam as condições estabelecidas acima. É o caso da classe de todos os semigrupos regulares finitos que não é uma pseudovariedade.

A intersecção de uma família qualquer de pseudovariedades é ainda uma pseudovariedade. Em particular, se considerarmos C uma classe de semigrupos finitos, a intersecção de todas as pseudovariedades que contêm C é ainda uma pseudovariedade chamada a *pseudovariedade gerada por* C e denotada por $\langle C \rangle$. Prova-se o seguinte:

$$\langle C \rangle = \{S \in \mathbf{S} \,:\, \exists\, n > 0 \,\exists\, S_1, \ldots, S_n \in C, \quad S \prec S_1 \times \cdots \times S_n\}.$$

Seja $\mathbf{V}$ uma pseudovariedade. O conjunto das pseudovariedades contidas em $\mathbf{V}$, ditas subpseudovariedades de $\mathbf{V}$, denota-se por $\mathcal{P}_S\mathbf{V}$. Sejam $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ duas pseudovariedades de $\mathcal{P}_S\mathbf{S}$. Definimos:

- o *supremo* $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ é a menor pseudovariedade contendo $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$;
- o *ínfimo* $\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}$ é a intersecção de $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$.

- $\mathcal{L}\mathbf{V} = \{S \in \mathbf{S} : \forall e \in E(S), eSe \in \mathbf{V}\}$;
- $\mathcal{D}\mathbf{V} = \{S \in \mathbf{S} :$ as $\mathcal{D}$-classes regulares de S são semigrupos de $\mathbf{V}\}$.

Qualquer que seja $\mathbf{V}$, $(\mathcal{P}_S\mathbf{V}, \cap, \vee)$ é um reticulado.

2.2 Variedades de Linguagens

Já nos referimos às variedades e às variedades de semigrupos finitos. Por último, vamos estudar as *variedades de linguagens*, cuja ligação com as pseudovariedades é estabelecida pelo *Teorema de Eilenberg*. Concluiremos o capítulo com alguns exemplos pertinentes de variedades de linguagens associadas a pseudovariedades conhecidas.

Chamamos *classe de linguagens reconhecíveis* a uma correspondência $\mathcal{C}$ que associa a cada alfabeto A um conjunto $\mathcal{C}(A^+)$ de linguagens reconhecíveis de A^+.

Definição 2.2 *Uma variedade de linguagens é uma classe $\mathcal{V}$ de linguagens reconhecíveis tal que, para todos os alfabetos A e B,*

- *$\mathcal{V}(A^+)$ é uma álgebra de Boole;*
- *para todo o morfismo $\varphi : A^+ \to B^+$, se $L \in \mathcal{V}(B^+)$ então $\varphi^{-1}(L) \in \mathcal{V}(A^+)$;*
- *se $L \in \mathcal{V}(A^+)$ e $a \in A$, então $a^{-1}L, La^{-1} \in \mathcal{V}(A^+)$.*

Seja $\mathbf{V}$ uma pseudovariedade e $\mathcal{V}$ a classe de linguagens reconhecíveis que associa a cada alfabeto A o conjunto $\mathcal{V}(A^+)$ das linguagens L de A^+ que são reconhecidas por um semigrupo de $\mathbf{V}$ (o que, pela Proposição 1.38, equivale a ter-se $S(L) \in \mathbf{V}$). Prova-se que esta classe $\mathcal{V}$ é, de facto, uma variedade de linguagens.

Teorema 2.3 *Sejam $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ duas pseudovariedades de semigrupos. Tem-se que $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}$ se e só se $\mathcal{V}(A^+) \subseteq \mathcal{W}(A^+)$, para todo o alfabeto A.*

Em particular, $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ se e só se $\mathcal{V} = \mathcal{W}$.

Apresentamos agora um teorema fundamental que estabelece que a correspondência descrita acima é uma bijecção entre as variedades de linguagens e as pseudovariedades de semigrupos.

Teorema 2.4 (Eilenberg, 1976) *A correspondência* $\mathbf{V} \mapsto \mathcal{V}$ *define uma bijecção entre as pseudovariedades de semigrupos e as variedades de linguagens.*

Em seguida, estudaremos as variedades de linguagens $\mathcal{N}(A^+)$, $\mathcal{K}(A^+)$, $\mathcal{D}(A^+)$ e $\mathcal{LI}(A^+)$ associadas às pseudovariedades $\mathbf{N}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$ e $\mathcal{L}\mathbf{I}$, respectivamente, que utilizaremos adiante. Note-se que $\mathbf{N}$ está contida em $\mathbf{K}$ e $\mathbf{D}$ e que $\mathcal{L}\mathbf{I}$ as contém.

Entende-se que uma linguagem L de A^+ é *cofinita* se $A^+ \setminus L$ é finita.

Teorema 2.5 *Seja A um alfabeto. Então $\mathcal{N}(A^+)$ é o conjunto das linguagens finitas ou cofinitas de A^+.*

Prova: Seja L uma linguagem finita e seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $L \subseteq A^{\leq n} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Seja ainda $\eta : A^+ \longrightarrow S(L)$ o epimorfismo canónico. Se $u \in A^+$ e $|u| > n$, então para todos os $x, y \in A^*$, $xuy \notin L$. Por conseguinte, todas as palavras de A^+ de comprimento superior a n são sintacticamente equivalentes, logo $S(L)$ é finito. Notemos por 0 a sua imagem sintáctica comum. Verifica-se que 0 é, de facto, um zero de $S(L)$.

Consideremos agora $u_1, \ldots, u_m \in A^+$ com $m > n$. Como $|u_1 \cdots u_m| > n$ tem-se que

$$\eta(u_1) \cdots \eta(u_m) = \eta(u_1 \cdots u_m) = 0.$$

Como η é sobrejectiva vem que $(S(L))^m = 0$ e, pela Proposição 1.31, $S(L) \in \mathbf{N}$ pelo que $L \in \mathcal{N}(A^+)$.

Suponhamos agora que L é uma linguagem cofinita. Então $A^+ \setminus L$ é finita e, pelo que acabámos de provar, $A^+ \setminus L \in \mathcal{N}(A^+)$. Consequentemente $S(A^+ \setminus L) \in \mathbf{N}$. Pela Proposição 1.39, $S(A^+ \setminus L) = S(L)$ pelo que $S(L) \in \mathbf{N}$ e portanto $L \in \mathcal{N}(A^+)$.

Reciprocamente suponhamos que $L \in \mathcal{N}(A^+)$. Então existe um semigrupo $S \in \mathbf{N}$ tal que S reconhece L. Seja $\varphi : A^+ \longrightarrow S$ um morfismo e $P \subseteq S$ tais que $\varphi^{-1}(P) = L$. Como S é um semigrupo nilpotente existe n tal que $S^n = 0$.

Suponhamos que $0 \notin P$. Consideremos $u \in A^+$ tal que $|u| \geq n$. Podemos escrever u como $u_1 \dots u_n$ com $u_i \in A^+$. A imagem de u por φ é 0 uma vez que

$$\varphi(u_1 \cdots u_n) = \varphi(u_1) \cdots \varphi(u_n) \in S^n.$$

Como $\varphi(u) = 0 \notin P$ tem-se que $u \notin L$ e, por conseguinte, L é finita.

No caso de $0 \in P$, utilizando o mesmo raciocínio prova-se facilmente que $A^+ \setminus L$ é finita.

Mostrou-se assim que se $L \in \mathcal{N}(A^+)$ então L é finita ou cofinita. $\square$

Teorema 2.6 *Para todo o alfabeto A, $\mathcal{K}(A^+)$ (respectivamente $\mathcal{D}(A^+)$) é o conjunto das linguagens da forma $XA^* \cup Y$ (respectivamente $A^*X \cup Y$) onde X e Y são linguagens finitas de A^+.*

Prova: Vamos demonstrar o resultado apenas para $\mathcal{K}(A^+)$ uma vez que para $\mathcal{D}(A^+)$ se procede de forma análoga.

Seja $L = XA^* \cup Y$ onde X e Y são linguagens finitas de A^+. Pelo teorema anterior, $S(Y) \in \mathbf{N}$ uma vez que Y é finito e por conseguinte, $S(Y) \in \mathbf{K}$. Falta provar que $S = S(XA^*) \in \mathbf{K}$.

Seja n tal que $X \subseteq A^{\leq n}$ e $u \in A^+$ tal que $|u| \geq n$. Sejam $x, y \in A^*$. Para toda a palavra $v \in A^+$,

$$xuvy \in XA^* \Leftrightarrow xu \in XA^* \Leftrightarrow xuy \in XA^*.$$

Conclui-se que $uv \sim_{XA^*} u$. Assim, $ts = t$ para todos os $t \in S^n$ e $s \in S$. Em particular, tomando $e \in E(S)$, tem-se $e \in S^n$, e portanto vem que

$$es = e, \quad para \;\; todo \;\; o \;\; s \in S.$$

Conclui-se assim que $S(XA^*) \in \mathbf{K}$. Como, pela Proposição 1.39, $S(L) \prec S(XA^*) \times S(Y)$ e as pseudovariedades são fechadas para divisões e produtos finitos, $S(L) \in \mathbf{K}$ e portanto $L \in \mathcal{K}(A^+)$.

Reciprocamente suponhamos que $L \in \mathcal{K}(A^+)$. Então L é reconhecida por um semigrupo S de $\mathbf{K}$. Existem portanto um morfismo $\varphi : A^+ \longrightarrow S$ e $P \subseteq S$ tais que $\varphi^{-1}(P) = L$. Suponhamos que $|S| = n$. Como $S \in \mathbf{K}$ tem-se, pela Proposição 1.29, que $S^n = SE(S)S = SE(S)$.

Seja $L = Y \cup Y^{'}$ onde Y é o conjunto das palavras de L de comprimento menor que n e $Y^{'}$ é o conjunto das palavras de L de comprimento superior ou igual a n. Seja $X = \{u \in A^n : \exists v \in A^*, uv \in L\}$. Vamos provar que $Y^{'} = XA^*$. Comecemos por provar a inclusão $Y^{'} \subseteq XA^*$. Para tal basta notar que são válidas as seguintes implicações:

$$\begin{aligned} w \in Y^{'} \;&\Rightarrow\; w = uv \;\; para \;\; alguns \;\; u \in A^n \;\; e \;\; v \in A^* \\ &\Rightarrow\; u \in X \;\; e \;\; v \in A^* \\ &\Rightarrow\; w \in XA^*. \end{aligned}$$

Falta agora mostrar que $XA^* \subseteq Y^{'}$. As seguintes implicações são válidas:

$$\begin{aligned} w \in XA^* \;&\Rightarrow\; w = uv \;\; para \;\; alguns \;\; u \in X \;\; e \;\; v \in A^* \\ &\Rightarrow\; \varphi(w) = \varphi(u)\varphi(v) \\ &\Rightarrow\; \varphi(w) = se\varphi(v) \;\; para \;\; alguns \;\; e \in E(S) \;\; e \;\; s \in S \\ &\Rightarrow\; \varphi(w) = se \\ &\Rightarrow\; \varphi(w) = \varphi(u). \end{aligned}$$

Note-se que

$$\begin{aligned} u \in X \;&\Rightarrow\; uv \in L \;\; para \;\; algum \;\; v \in A^* \\ &\Rightarrow\; \varphi(uv) = \varphi(u) \\ &\Rightarrow\; u \in L \end{aligned}$$

donde se conclui que se $w \in XA^*$ então $w \in L$. Dado que $|w| \geq n$, deduz-se que $w \in Y^{'}$, o que termina a prova de que $XA^* \subseteq Y^{'}$.

Mostrou-se assim que $L = XA^* \cup Y$. □

Teorema 2.7 *Para todo o alfabeto A, $\mathcal{LI}(A^+)$ é o conjunto das uniões das linguagens da forma $XA^*Y \cup Z$ onde X, Y e Z são linguagens finitas de A^+. Alternativamente, $\mathcal{LI}(A^+)$ é também a álgebra de Boole gerada pelas linguagens da forma uA^* e A^*u onde $u \in A^+$.*

Prova: Seja $\mathcal{V}(\mathcal{A}^+)$ a álgebra de Boole gerada pelas linguagens da forma uA^* e A^*u, onde $u \in A^+$. Esta prova será efectuada em 3 passos:

(1) Vamos estabelecer que toda a linguagem da forma $XA^*Y \cup Z$ onde X, Y e Z são linguagens finitas de A^+, está em $\mathcal{V}(\mathcal{A}^+)$.

Sejam u, v palavras de A^+.

(i) $\{u\} = uA^* \setminus \bigcup_{a \in A} uaA^*$ donde todas as linguagens finitas estão em $\mathcal{V}(\mathcal{A}^+)$,

(ii) $uA^*v = (uA^* \cap A^*v) \setminus F$ *onde* $F = \{f \in A^* : |f| < |u| + |v|\}$ donde todas as linguagens da forma XA^*Y, com X, Y linguagens finitas de A^+, estão em $\mathcal{V}(\mathcal{A}^+)$.

Logo, conclui-se que, para quaisquer linguagens finitas $X, Y, Z \subseteq A^+$, se tem $XA^*Y \cup Z \in \mathcal{V}(A^+)$.

(2) Já provámos que $\mathcal{K}(A^+)$ é o conjunto de linguagens da forma $XA^* \cup Y$ e $\mathcal{D}(A^+)$ é o conjunto de linguagens da forma $A^*X \cup Y$ onde X e Y são linguagens finitas de A^+. Portanto, $uA^* \in \mathcal{K}(A^+)$ e $A^*u \in \mathcal{D}(A^+)$, donde $uA^*, A^*u \in \mathcal{LI}(A^+)$. Assim $\mathcal{V}(A^+) \subseteq \mathcal{LI}(A^+)$.

(3) Reciprocamente seja $L \in \mathcal{LI}(A^+)$. Seja $S = S(L)$ e seja $n = |S|$. Como $S \in \mathbf{\mathcal{L}I}$ tem-se que $S^n = SE(S)S = E(S)$ (note-se que $E(S)$ é o ideal minimal de S). Seja $\eta : A^+ \to S$ o morfismo sintáctico de L.

Consideremos uma palavra $u \in L$ tal que $|u| \geq 2n$. Então podemos escrever u da seguinte forma:

$$u = xyz \ \text{ com } \ x, y, z \in A^* \ \text{ e } \ |x| = |z| = n.$$

Como $S \in \mathbf{\mathcal{L}I}$ vem que $esf = ef$ para todos os $e, f \in E(S)$ e para todo o $s \in S$. Uma vez que $\eta(x), \eta(z) \in S^n = E(S)$, são válidas as igualdades:

$$\begin{aligned} \eta(u) &= \eta(x)\,\eta(y)\,\eta(z) \\ &= \eta(x)\,\eta(z) \\ &= \eta(x)\,\eta(w)\,\eta(z) \quad \textit{para qualquer} \quad w \in A^*. \end{aligned}$$

Assim $xA^*z \subseteq \eta^{-1}(\eta(u)) \subseteq L$. Por conseguinte, L é uma união finita de linguagens da forma xA^*z e de um conjunto finito de palavras de comprimento inferior a $2n$.

Estabeleceu-se assim que todas as linguagens $L \in \mathcal{LI}(A^+)$ são uniões de linguagens da forma $XA^*Y \cup Z$ onde X, Y e Z são linguagens finitas de A^+.

O resultado é agora uma consequência imediata de (**1**), (**2**) e (**3**). □

2.3 Pseudovariedades Equacionais

Seja A um alfabeto. Chama-se *identidade* a um par de palavras $u, v \in A^+$, que representamos habitualmente por $u = v$. Uma identidade da forma $u = u$ diz-se *trivial*.

Diz-se que um semigrupo finito S verifica ou *satisfaz uma identidade* $u = v$, com $u, v \in A^+$, e escreve-se $S \models u = v$, se $\varphi(u) = \varphi(v)$, para todo o homomorfismo $\varphi : A^+ \longrightarrow S$.

Uma classe $\mathcal{C}$ de semigrupos finitos satisfaz um conjunto de identidades Σ, e notamos $\mathcal{C} \models \Sigma$, se

$$\forall S \in \mathcal{C}\ \forall u = v \in \Sigma,\ S \models u = v.$$

Seja Σ um conjunto de identidades. Denotamos por $[\![\Sigma]\!]$ a classe de todos os semigrupos finitos que verificam as identidades de Σ. Prova-se que $[\![\Sigma]\!]$ é uma pseudovariedade e dizemos que é *definida por* Σ.

Definição 2.8 *Uma pseudovariedade* $\mathbf{V}$ *diz-se equacional se existir um conjunto de identidades* Σ *tal que* $\mathbf{V} = [\![\Sigma]\!]$.

Por exemplo,

- são equacionais as seguintes pseudovariedades:

  $$\mathbf{S} = [\![x = x]\!],\ \mathbf{B} = [\![x^2 = x]\!],\ \mathbf{Com} = [\![xy = yx]\!],\ \mathbf{Sl} = [\![x^2 = x,\ xy = yx]\!].$$

- $\mathbf{G}$ e $\mathbf{N}$ não são equacionais.

Já referimos que nem todas as pseudovariedades são equacionais. No entanto, todas podem ser definidas ultimamente através de identidades.

Teorema 2.9 (Eilenberg e Schützenberger [24]) *Uma classe não vazia* $\mathcal{U}$ *de semigrupos é uma pseudovariedade se e só se existe uma sucessão* $(u_n = v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de identidades tal que*

$$\mathcal{U} = \{S \in \mathbf{S} : \exists p \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq p, \quad S \models u_n = v_n\}$$

Dizemos, nesse caso, que $\mathcal{U}$ *é* **definida ultimamente por** $(u_n = v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Considerem-se por exemplo as pseudovariedades $\mathbf{G}$ e $\mathbf{N}$ que não são equacionais. Sabe-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \{S \in \mathbf{S} : \exists p \in \mathbb{N} \ \forall n \geq p, \quad S \models x^{n!}y = yx^{n!} = y\} \\ \mathbf{N} &= \{S \in \mathbf{S} : \exists p \in \mathbb{N} \ \forall n \geq p, \quad S \models x^{n}y = yx^{n} = x^n\}. \end{aligned}$$

Um exemplo de uma sucessão que define $\mathbf{G}$ ultimamente é a seguinte

$$xy = yx, \ yx = y, \ x^{2!} = yx^{2!}, \ yx^{2!} = y, \ldots, \ x^{k!}y = yx^{k!}, \ yx^{k!} = y, \ldots \ (k \in \mathbb{N})$$

ou seja $(u_k = v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em que

$$u_{2k-1} = x^{k!}y, \ v_{2k-1} = yx^{k!}, \ u_{2k} = yx^{k!}, \ v_{2k} = y.$$

O caso de $\mathbf{N}$ pode ser tratado análogamente.

Capítulo 3

Operações Implícitas

A noção de operação implícita assume um papel preponderante no cálculo de supremos de pseudovariedades que constitui o objectivo deste trabalho.

3.1 Teorema de Reiterman

Comecemos por definir operação implícita.

Definição 3.1 *Seja* $\mathbf{V}$ *uma pseudovariedade e seja* $A = \{a_1, ..., a_n\}$ *um alfabeto finito. Uma* **operação implícita A-ária** *(por vezes também chamada n-ária)* **sobre V** *é uma família* $\pi = (\pi_S)_{S \in \mathbf{V}}$ *tal que:*

i) para todo o $S \in \mathbf{V}$*,* $\pi_S : S^n \to S$ *é uma função;*

ii) para todo o homomorfismo $\varphi : S \to T$ *com* $S, T \in \mathbf{V}$*, o diagrama seguinte comuta:*

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "\pi_S"] \arrow[d, "\varphi^n"'] & S \arrow[d, "\varphi"] \\ T^n \arrow[r, "\pi_T"] & T \end{tikzcd}$$

O conjunto de todas as operações implícitas A-árias sobre $\mathbf{V}$, que notamos $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ munido da operação binária definida por $(\pi\rho)_S = \pi_S\rho_S$ para todo o $S \in \mathbf{V}$, é um semigrupo. Quando estivermos interessados na cardinalidade de A, designá-lo-emos por A_n e designaremos por $\hat{F}_{A_n}(\mathbf{V})$ o conjunto das operações implícitas A_n-árias sobre $\mathbf{V}$.

Os exemplos mais simples, apesar de fundamentais, de operações implícitas são as operações explícitas que passamos a definir.

Seja $\mathbf{V}$ uma pseudovariedade e seja $A = \{a_1, ..., a_n\}$ um alfabeto finito. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, a_i define uma operação implícita A-ária sobre $\mathbf{V}$, chamada a *projecção sobre a componente i* em que, para cada $S \in \mathbf{V}$, a função $(a_i)_S : S^n \longrightarrow S$ é definida por:

$$(a_i)_S(s_1, ..., s_n) = s_i.$$

O subsemigrupo de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ gerado pelas projecções denota-se por $F_A(\mathbf{V})$ e os seus elementos são chamados *operações explícitas sobre* $\mathbf{V}$.

Exemplo 3.2 *Seja* $\mathbf{V}$ *uma pseudovariedade de semigrupos. Se considerarmos o alfabeto* $A = \{a, b\}$ *e a palavra* $u = aba$*, então para* $S \in \mathbf{V}$ *e* $s_1, s_2 \in S$*, podemos definir a função* $u_S : S^2 \longrightarrow S$ *por*

$$u_S(s_1, s_2) = a_S(s_1, s_2)b_S(s_1, s_2)a_S(s_1, s_2) = s_1s_2s_1.$$

Assim, u define uma operação implícita sobre $\mathbf{V}$ *que é também explícita.*

Podemos generalizar o exemplo anterior. Dado um alfabeto $A = \{a_1, ..., a_n\}$ qualquer e dada uma palavra $u = a_{i_1}a_{i_2} \cdots a_{i_m} \in A^+$, com $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m} \in A$, então u define a operação explícita A-ária tal que, para cada $S \in \mathbf{V}$ e $s_1, \ldots, s_n \in \mathbf{S}$,

$$u_S(s_1, \ldots, s_n) = s_{i_1}s_{i_2} \cdots s_{i_m}.$$

Além das operações explícitas, a operação implícita que aparece com mais frequência é a que se define de seguida, chamada *potência-ω*.

Seja S um semigrupo finito e seja $s \in S$. O subsemigrupo $\langle s \rangle$ de S gerado por s é evidentemente finito. Pela Proposição 1.11, existe um único idempotente em $\langle s \rangle$, representado por s^ω, que é precisamente o elemento neutro do núcleo de $\langle s \rangle$.

A potência-ω é a operação implícita a^ω sobre $\mathbf{V}$ definida para cada $S \in \mathbf{V}$ e $s \in S$ por

$$(a^\omega)_S(s) = s^\omega.$$

Apesar de usualmente ser uma operação não explícita, a^ω (bem como outras operações implícitas) pode, no caso de algumas pseudovariedades, coincidir com operações explícitas sobre $\mathbf{V}$.

Exemplo 3.3 *Repare-se que na pseudovariedade* $\mathbf{Sl} = [\![x^2 = x, xy = yx]\!]$*, a operação implícita* a^ω *é explícita:*

$$\forall S \in \mathbf{Sl} \ \ \forall s \in S \quad (a^\omega)_S(s) = s^\omega = s.$$

Portanto $a^\omega = a$ *em* $\mathbf{Sl}$*.*

Note-se que, se $\pi = (\pi_S)_{S\in\mathbf{V}}$ é uma operação implícita sobre $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ é uma pseudovariedade contida em $\mathbf{V}$, então $(\pi_S)_{S\in\mathbf{W}}$ é uma operação implícita sobre $\mathbf{W}$ que denotaremos por $p_{\mathbf{W}}(\pi)$.

Estamos agora em condições de estender a noção de identidade à noção de pseudoidentidade.

Chama-se *pseudoidentidade* a um par (π, ρ), com $\pi, \rho \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$, que representamos habitualmente por $\pi = \rho$.

Dizemos que um semigrupo $S \in \mathbf{V}$ verifica ou *satisfaz uma pseudoidentidade* $\pi = \rho$, com $\pi, \rho \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$, e escrevemos $S \models \pi = \rho$, *se* $\pi_S = \rho_S$.

Uma classe $\mathcal{C}$ de semigrupos finitos satisfaz um conjunto de pseudoidentidades Σ, e notamos $\mathcal{C} \models \Sigma$, se

$$\forall S \in \mathcal{C} \ \forall \pi = \rho \in \Sigma, \ S \models \pi = \rho.$$

Da mesma forma que para as identidades, se Σ é um conjunto de pseudoidentidades sobre $\mathbf{V}$, $[\![\Sigma]\!]$ denota a classe de todos os semigrupos finitos de $\mathbf{V}$ que verificam as pseudoidentidades de Σ. Prova-se que $[\![\Sigma]\!]$ é uma pseudovariedade e dizemos que é *definida por* Σ.

Exemplo 3.4 *Algumas das pseudovariedades referidas anteriormente podem agora ser apresentadas de forma mais simples:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} &= [\![x^\omega y = y x^\omega = y]\!] \\
\mathbf{N} &= [\![x^\omega y = y x^\omega = x^\omega]\!] \\
\mathcal{L}\mathbf{I} &= [\![x^\omega y x^\omega = x^\omega]\!] \\
\mathbf{K} &= [\![x^\omega y = x^\omega]\!] \\
\mathbf{D} &= [\![y x^\omega = x^\omega]\!]
\end{aligned}$$

Nota: As pseudoidentidades acima podem ser consideradas sobre a pseudovariedade $\mathbf{S}$ de todos os semigrupos finitos, como é mais habitual.

Como caso particular do estudo das variedades por Birkhoff , sabemos que uma classe de semigrupos é uma variedade se e só se é equacional. Reiterman, em 1982, provou um teorema análogo que enunciamos de seguida no caso dos semigrupos finitos.

Teorema 3.5 (Reiterman) *Seja $\mathcal{U}$ uma classe não vazia de semigrupos finitos. Então $\mathcal{U}$ é uma pseudovariedade se e só se existe um conjunto Σ de pseudoidentidades sobre uma pseudovariedade $\mathbf{W}$ contendo $\mathcal{U}$ tal que*

$$\mathcal{U} = [\![\Sigma]\!] = \{S \in \mathbf{W} : \forall \pi = \rho \in \Sigma, S \models \pi = \rho\}.$$

Em $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ pode ser definida uma estrutura topológica, conforme o breve resumo que se segue. Para mais detalhes consultar [5].

Para cada semigrupo $S \in \mathbf{V}$, existe uma aplicação natural

$$\begin{array}{rccc} \alpha_S : & \hat{F}_A(\mathbf{V}) & \longrightarrow & S^{S^n} \\ & \pi & \longmapsto & \pi_S \end{array}$$

que induz uma aplicação injectiva

$$\begin{array}{rccc} \alpha_{\mathbf{V}} : & \hat{F}_A(\mathbf{V}) & \longrightarrow & \prod\limits_{S \in \mathbf{V_0}} S^{S^n} \\ & \pi & \longmapsto & (\pi_S)_S \end{array}$$

onde $\mathbf{V_0}$ é um conjunto numerável que contém um representante de cada classe de isomorfismo de $\mathbf{V}$. Assim, $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ pode ser interpretado como um subsemigrupo de $\prod_{S \in \mathbf{V_0}} S^{S^n}$.

Consideremos os semigrupos finitos munidos da topologia discreta e o produto cartesiano $\prod_{S \in \mathbf{V_0}} S^{S^n}$ munido da topologia produto. Consideremos ainda $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ como um subespaço topológico de $\prod_{S \in \mathbf{V_0}} S^{S^n}$ através da aplicação $\alpha_{\mathbf{V}}$.

Proposição 3.6 *Com as definições acima, $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ é um semigrupo topológico compacto no qual $F_A(\mathbf{V})$ é denso.*

Seja $r : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \times \hat{F}_A(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ uma aplicação definida por

$$r(\pi, \rho) = min\{|S| : S \in \mathbf{V},\ \pi_S \neq \rho_S\}.$$

Convenciona-se que $min\,\emptyset = +\infty$.

Defina-se ainda uma aplicação $d : \hat{F}_A(\mathbf{V}) \times \hat{F}_A(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que

$$d(\pi, \rho) = \begin{cases} 2^{-r(\pi,\rho)} & \text{se } r(\pi,\rho) \text{ é finito} \\ 0 & \text{se } r(\pi,\rho) = +\infty \end{cases}$$

Prova-se facilmente que são válidas as propriedades:

i. $d(\pi, \rho) = 0$ se e só se $\pi = \rho$;

ii. $d(\pi, \rho) = d(\rho, \pi)$;

iii. $d(\pi, \rho) \leq max\{d(\pi, \theta), d(\theta, \rho)\}$;

iv. $d(\pi\theta, \rho\tau) \leq max\{d(\pi, \rho), d(\theta, \tau)\}$;

o que mostra em particular que d é uma ultramétrica.

Proposição 3.7 ([5]) *A topologia anteriormente definida sobre $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ é induzida por d.*

Proposição 3.8 ([5]) *O espaço métrico $(\hat{F}_A(\mathbf{V}), d)$ é o completado do subespaço $(F_A(\mathbf{V}), d)$.*

Pelo que foi exposto, note-se que uma sucessão $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de operações implícitas A-árias sobre $\mathbf{V}$ converge para $\pi \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ se e só se, para todo o $S \in \mathbf{V}$, $\pi_S = (\pi_n)_S$ a partir de uma certa ordem, ou seja, se e só se a sucessão $(\pi_n)_n$ coincide ultimamente com π em cada $S \in \mathbf{V}$.

Exemplo 3.9 *Para cada $\pi \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$, a sucessão $(\pi^{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para π^ω, o único idempotente do subsemigrupo de $\hat{F}_A(\mathbf{V})$ gerado por π.*

3.2 Operações Implícitas Sobre Algumas Pseudovariedades

O resultado seguinte, que é uma consequência imediata do Teorema de Reiterman, é muito útil no cálculo do supremo de pseudovariedades.

Proposição 3.10 *Dadas duas pseudovariedades* $\mathbf{V}$ *e* $\mathbf{W}$ *e dadas operações implícitas* $\pi, \rho \in \hat{F}_A(\mathbf{S})$, *tem-se que*

$$\mathbf{V} \vee \mathbf{W} \models \pi = \rho \text{ se e só se } \mathbf{V} \models \pi = \rho \text{ e } \mathbf{W} \models \pi = \rho.$$

Prova: Se $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ satisfaz a pseudoidentidade $\pi = \rho$, então é trivial que $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ também a satisfazem.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathbf{V} \vee \mathbf{W} = [\![\Sigma]\!]$. Se $\mathbf{V}, \mathbf{W} \models \pi = \rho$ mas $\mathbf{V} \vee \mathbf{W} \not\models \pi = \rho$, então existe uma pseudovariedade $\mathbf{U}$ tal que

$$\mathbf{U} = [\![\Sigma \cup \{\pi = \rho\}]\!] \subset \mathbf{V} \vee \mathbf{W}$$

e $\mathbf{V}, \mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}$ o que é absurdo uma vez que, por definição, o supremo de $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ é a menor pseudovariedade que contém ambas. $\square$

Sendo as pseudoidentidades satisfeitas por $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ exactamente aquelas verificadas por $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ simultaneamente, então é evidente que uma das estratégias do cálculo de supremos consiste em estudar as operações implícitas sobre as pseudovariedades envolvidas. Com este propósito, estudaremos, em seguida, as operações implícitas sobre algumas pseudovariedades que serão de grande utilidade mais tarde.

Operações Implícitas sobre N

Consideremos a pseudovariedade dos semigrupos nilpotentes, $\mathbf{N} = [\![x^\omega = 0]\!]$. Podemos escrevê-la ainda como

$$\mathbf{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{N}_k \quad \text{onde} \quad \mathbf{N}_k = [\![a_1 ... a_k = 0]\!].$$

Seja A um alfabeto. Consideremos $\mathbf{N}_2 = [\![a_1 a_2 = 0]\!]$. Prova-se que o conjunto das operações explícitas sobre A pode ser identificado com o conjunto de todas as palavras sobre o alfabeto A de comprimento inferior ou igual a 1 junto com um elemento 0.

Se considerarmos $\mathbf{N}_3 = [\![a_1a_2a_3 = 0]\!]$ é também fácil constatar que $F_A(\mathbf{N}_3)$ pode ser visto como o conjunto das palavras sobre A de comprimento inferior ou igual a 2 e ainda do elemento 0. Iterando este raciocínio conclui-se que $F_A(\mathbf{N}_k)$ é o conjunto das palavras de comprimento inferior ou igual a $k-1$ e de um elemento 0.

Os semigrupos $F_A(\mathbf{N}_k)$ são elementos de $\mathbf{N}$ e constituem um conjunto de geradores de $\mathbf{N}$. Portanto, deduz-se que $\mathbf{N}$ não satisfaz nenhuma igualdade não trivial, ou seja, $F_A(\mathbf{N}) = A^+$.

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão de $F_A(\mathbf{N}) = A^+$. Se $(u_n)_n$ converge em $\hat{F}_A(\mathbf{N})$ então converge em cada $\hat{F}_A(\mathbf{N}_k)$. Temos uma das seguintes situações:

- Existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $(u_n)_n$ é ultimamente constante e igual a $v = a_1a_2...a_l$ com $l < k$ e $a_i \in A$.

  Neste caso,
  $$\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq p, \quad u_n = v$$
  e, portanto, $(u_n)_n \to v$.

- Para todo o $k \in \mathbb{N}$, $|u_n| \geq k$ a partir de uma certa ordem, que depende de k. Duas sucessões deste tipo são iguais em $\hat{F}_A(\mathbf{N}_k)$ para qualquer k a partir de uma certa ordem e portanto convergem para o mesmo elemento de $\hat{F}_A(\mathbf{N})$, que denotamos por 0, uma vez que se trata, de facto, de um elemento zero.

Conclui-se que $\hat{F}_A(\mathbf{N}) = A^+ \cup \{0\}$, ou seja, $\hat{F}_A(\mathbf{N})$ é o semigrupo topológico obtido de A^+ por adição de um ponto "no infinito" que, em particular, é um zero.

A seguinte proposição será útil na caracterização das operações implícitas de pseudovariedades que contêm $\mathbf{N}$.

Proposição 3.11 *Para uma pseudovariedade $\mathbf{V}$ de semigrupos, $F_A(\mathbf{V})$ é um semigrupo livre sobre A e um espaço topológico discreto se e só se $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{V}$.*

Operações Implícitas sobre K

Já vimos que a pseudovariedade $\mathbf{K}$ dos semigrupos cujos idempotentes são zeros à esquerda é definida pela pseudoidentidade $x^\omega y = x^\omega$. A fim de estudarmos $\hat{F}_A(\mathbf{K})$, vamos escrevê-la como

$$\mathbf{K} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{K}_k \quad \textit{onde} \quad \mathbf{K}_k = [\![a_1...a_k b = a_1...a_k]\!].$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos $F_A(\mathbf{K}_k)$, o semigrupo formado pelas palavras sobre A de comprimento inferior ou igual a k, onde o produto de duas palavras é o mais longo prefixo de comprimento menor ou igual a k do seu produto usual.

Dado que $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{K}$, deduz-se da Proposição 3.11, que $F_A(\mathbf{K}) = A^+$.

Os semigrupos $F_A(\mathbf{K}_k)$ geram $\mathbf{K}$ e verifica-se que uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A^+ converge em $\hat{F}_A(\mathbf{K})$ se converge em cada $F_A(\mathbf{K}_k)$. Neste caso, temos uma das seguintes situações:

- $u_n = u$, para alguma palavra u e para todo o n suficientemente grande;
- para todo o $k \in \mathbb{N}$ existe uma palavra u com $|u| = k$ tal que u é prefixo de u_n para todo o n suficientemente grande.

Podemos portanto identificar os elementos não explícitos de $\hat{F}_A(\mathbf{K})$ com as palavras infinitas à direita sobre A. Então $\hat{F}_A(\mathbf{K}) = A^+ \cup A^{\mathbb{N}}$, ou seja, o semigrupo das operações implícitas sobre $\mathbf{K}$ é formado por palavras de A^+ e por palavras infinitas à direita sobre A. Este semigrupo é munido do produto induzido do produto sobre A^+ e $uv = u$ se $u \in A^{\mathbb{N}}$.

Operações Implícitas sobre D

Como $\mathbf{D}$ é a pseudovariedade dos semigrupos cujos idempotentes são zeros à direita, o estudo do conjunto das operações implícitas sobre $\mathbf{D}$ efectua-se de forma análoga ao anterior. Neste caso, concluir-se-ia que o semigrupo $\hat{F}_A(\mathbf{D})$ é formado por palavras de A^+ e palavras infinitas à esquerda sobre A. O produto também é induzido do produto sobre A^+ e $uv = v$ se $v \in A^{-\mathbb{N}}$.

Operações Implícitas sobre $\mathcal{L}\mathbf{I}$

Analisemos agora a pseudovariedade dos semigrupos localmente triviais. Já afirmamos que $\mathcal{L}\mathbf{I} = [\![x^\omega y x^\omega = x^\omega]\!]$. Também esta pseudovariedade se pode escrever como

$$\mathcal{L}\mathbf{I} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}\mathbf{I}_k \quad onde \quad \mathcal{L}\mathbf{I}_k = [\![a_1...a_k b c_1...c_k = a_1...a_k c_1...c_k]\!].$$

Prova-se que uma sucessão $(u_n)_n$ de A^+ converge em $\hat{F}_A(\mathcal{L}\mathbf{I}_k)$ se e só se é ultimamente constante, ou se todas as palavras de $(u_n)_n$ têm ultimamente o mesmo prefixo e o mesmo sufixo de comprimento k, para todo o k. Então $\{(w, w') : w \in A^{\mathbb{N}}, w' \in A^{-\mathbb{N}}\}$ pode ser identificado com o conjunto das operações implícitas não explícitas, ou seja, $\hat{F}_A(\mathcal{L}\mathbf{I}) = A^+ \cup (A^{\mathbb{N}} \times A^{-\mathbb{N}})$. O produto, para todos os u, $u' \in A^+$ e todos os (v, w), $(v', w') \in A^{\mathbb{N}} \times A^{-\mathbb{N}}$, é dado por:

$$\begin{aligned} u \cdot u' &= uu' \\ u \cdot (v, w) &= (uv, w) \\ (v, w) \cdot u &= (v, wu) \\ (v, w)(v', w') &= (v, w'). \end{aligned}$$

Operações Implícitas sobre ZE

Consideremos a pseudovariedade **ZE** dos semigrupos finitos cujos idempotentes são centrais, ou seja, $\mathbf{ZE} = [\![x^\omega y = y x^\omega]\!]$. Note-se que o ideal mínimo de qualquer semigrupo de **ZE** é um grupo.

Definição 3.12 *Seja $\pi \in \hat{F}_A(\mathbf{ZE})$ e seja $n = |A|$. Diz-se que π tem a* **propriedade do núcleo** *se para todo o $S \in \mathbf{ZE}$ e $s_1, ..., s_n \in S$, $\pi_S(s_1, ..., s_n)$ pertence ao núcleo (ou seja, ao ideal mínimo) do subsemigrupo $< s_1, ..., s_n >$ de S.*

Lema 3.13 ([6]) $\mathbf{ZE} \models (xy)^\omega = x^\omega y^\omega$

Proposição 3.14 *Seja* $\pi \in \hat{F}_A(\mathbf{ZE})$. *Então* π *tem a propriedade do núcleo se e só se*

$$\pi(a_1, ..., a_n) = \rho(ea_1, ..., ea_n)$$

onde $e = (a_1 \cdots a_n)^\omega$ *para algum* $\rho \in \hat{F}_A(\mathbf{G})$.

Prova: Se $\pi(a_1, ..., a_n) = \rho(ea_1, ..., ea_n)$ é evidente que π tem a propriedade do núcleo.

Reciprocamente, seja $\pi = (\pi_S)_{S\in \mathbf{ZE}}$ e suponhamos que π tem a propriedade do núcleo. Seja $\rho = p_{\mathbf{G}}(\pi) = (\pi_S)_{S\in \mathbf{G}}$.

Para cada $S \in \mathbf{ZE}$ e cada $s_1, ..., s_n \in S$, pelo Lema 3.13, $f = (s_1 \cdots s_n)^\omega$ é o elemento neutro do núcleo de $< s_1, ..., s_n >$ donde $\pi(a_1, ..., a_n) = \pi(a_1, ..., a_n)e$.

Consideremos a aplicação $\varphi : S \longrightarrow S$, definida por $\varphi(s) = sf$. É trivial que φ é um homomorfismo, isto é, que $(s \cdot t)f = sf \cdot tf$, para quaisquer $s, t \in S$, uma vez que os idempotentes são centrais. Como, por hipótese, $\pi(s_1, ..., s_n)$ pertence ao núcleo de $< s_1, ..., s_n >$, para todos os $s_1, ..., s_n \in S$, deduz-se que

$$\pi(a_1, ..., a_n)e = \pi(ea_1, ..., ea_n) = \rho(ea_1, ..., ea_n).$$

$\square$

Lema 3.15 *Seja* $S \in \mathbf{ZE}$ *e* $|S| = n$. *Seja* $v \in A^+$ *uma palavra e seja* $a \in A$ *tal que* $|v|_a \geq n$. *Tem-se que*

$$S \models v = a^\omega v.$$

Prova: Sejam $s \in S$ e $t_0, t_1, ..., t_n \in S^1$. Consideremos ainda $r_k = t_0 s t_1 s ... t_k$ onde $k = 0, 1, ..., n$. Podem ocorrer duas situações:

(I) os r_k são todos distintos. Neste caso, como $|S| = n$ e $r_k \in S^1$ então para algum k, $r_k = s^\omega$. Vem que

$$\begin{aligned} r_n &= (t_0 s t_1 s ... t_k) s t_{k+1} s ... t_n \\ &= r_k s t_{k+1} s ... t_n \\ &= s^\omega s t_{k+1} s ... t_n \\ &= s^\omega (s^\omega s t_{k+1} s ... t_n) \\ &= s^\omega r_n \end{aligned}$$

(II) existem $l, k \in \{0, 1, ..., n\}$ com $k < l$ tais que $r_k = r_l$. Então

$$\begin{aligned}
r_k = r_l &= (t_0 s t_1 s ... t_k) s t_{k+1} s ... t_l \\
&= r_k s t_{k+1} s ... t_l \\
&= r_k (s t_{k+1} s ... t_l)(s t_{k+1} s ... t_l) \\
&= r_k (s t_{k+1} s ... t_l)^\omega \\
&= r_k s^\omega (t_{k+1} s ... t_l)^\omega \quad \textit{pelo Lema } 3.13 \\
&= r_k s^\omega s^\omega (t_{k+1} s ... t_l)^\omega \\
&= r_k s^\omega (s t_{k+1} s ... t_l)^\omega \\
&= s^\omega r_k (s t_{k+1} s ... t_l)^\omega \quad \textit{porque } \mathbf{ZE} = [\![x^\omega y = y x^\omega]\!] \\
&= s^\omega r_k
\end{aligned}$$

Em ambos os casos, conclui-se que $r_n = s^\omega r_n$, o que prova o resultado. □

Estamos agora em condições de apresentar a descrição das operações implícitas sobre a pseudovariedade **ZE**.

Teorema 3.16 *Seja $\pi \in \hat{F}_{A_m}(\mathbf{ZE})$. Então π é da forma*

$$\pi = w_0 \rho_1(ea_1, ..., ea_n) w_1 ... \rho_k(ea_1, ..., ea_n) w_k$$

onde $n \leq m$, cada w_i é uma palavra sobre $A_m \backslash A_n$, w_0, w_k podem ser vazias, $e = (a_1 ... a_n)^\omega$ e cada $\rho_i \in \hat{F}_{A_n}(\mathbf{G})$.

Prova: Seja $\pi \in \hat{F}_{A_m}(\mathbf{ZE})$. Como $F_{A_m}(\mathbf{ZE})$ é denso em $\hat{F}_{A_m}(\mathbf{ZE})$, existe uma sucessão $(v_k)_k$ de A_m^+ tal que

$$\lim_{k \to +\infty} v_k = \pi.$$

Consideremos, para cada k e cada i, o número $|v_k|_{a_i}$ de ocorrências de $a_i \in A_m$ em cada palavra v_k. Para cada i, podem ocorrer duas situações:

(I) existe um $r \in \mathbb{N}$ tal que $|v_k|_{a_i} \leq r$, para todo o k. Ou seja, a_i pode, por exemplo, ocorrer um número s_k (com $s_k \leq r$) de vezes para todos os v_k.

(II) $\{|v_k|_{a_i} : k = 1, 2, ...\}$ é ilimitado, ou seja, não existe um limite superior para $|v_k|_{a_i}$, pelo que podemos assumir que $|v_k|_{a_i} \geq k$.

Seja J o conjunto de índices j com a_j nas condições de *(II)*. Retirando de v_k todos os a_j com $j \in J$, podemos assumir (considerando uma subsucessão de $(v_k)_k$, se necessário) que obtemos, para todos os k, a mesma palavra u, digamos $u = w_0 w_1 ... w_r$. Então,

$$v_k = w_0 v_{k1} w_1 ... v_{kr} w_r.$$

Pela definição de convergência de $(v_k)_k$, dado $l \in \mathbb{N}$, existe um inteiro k_l tal que $S \models \pi = v_k$ para todo o $k \geq k_l$ e todo $S \in \mathbf{ZE}$ com $|S| \leq l$. Pelo lema anterior, $S \models v_k = a_j^\omega v_k$ $(j \in J)$ para $k \geq l$ donde

$$S \models \pi = v_k = a_j^\omega v_k, \quad para \quad k \geq \; max\{l, k_l\}.$$

Consideremos a sucessão $\sigma_{ki} = v_{ki} \prod_{j \in J} a_j^\omega$.

Seja $\sigma_k = w_0 \sigma_{k1} w_1 ... \sigma_{kr} w_r$. Então, nas condições anteriores

$$\begin{aligned} S \models \sigma_k &= w_0 v_{k1} w_1 ... v_{kr} w_r (\prod_{j \in J} a_j^\omega)^r \\ &= v_k (\prod_{j \in J} a_j^\omega)^r \\ &= v_k \end{aligned}$$

Tem-se assim que $\lim_{k \to +\infty} \sigma_k = \pi$ e, como $\hat{F}_{A_m}(\mathbf{ZE})$ é compacto, podemos assumir que cada sucessão $(\sigma_{ki})_k$ converge para, digamos, π_i. Como cada σ_{ki} tem a propriedade do núcleo (repare-se que não tínhamos tal garantia para v_{ki}), então também podemos garantir que cada π_i tem a propriedade do núcleo.

Pela proposição anterior vem que

$$\pi_i(a_1, ..., a_n) = \rho_i(ea_1, ..., ea_n)$$

onde $e = (a_1 ... a_n)^\omega$ para algum $\rho_i \in \hat{F}_{A_n}(\mathbf{G})$. Pelo que cada operação implícita sobre $\mathbf{ZE}$ é da forma apresentada. $\square$

Capítulo 4

Supremo de Pseudovariedades

4.1 Primeiros resultados

Chegamos enfim, ao tema a que nos propusemos dedicar este trabalho: o estudo do operador supremo, um dos operadores mais úteis, no reticulado das pseudovariedades de semigrupos.

Recorde-se que, dadas duas pseudovariedades $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$, o supremo $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ é a menor pseudovariedade que contém ambas as pseudovariedades $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$.

Dadas duas pseudovariedades $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$, definidas por conjuntos de pseudoidentidades Σ_1 e Σ_2, isto é, $\mathbf{V} = [\![\Sigma_1]\!]$ e $\mathbf{W} = [\![\Sigma_2]\!]$, facilmente se verifica que $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} = [\![\Sigma_1 \cup \Sigma_2]\!]$. O cálculo do supremo, porém, é bem mais complexo.

Repare-se que $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ é uma pseudovariedade para todos os $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ enquanto que $\mathbf{V} \cup \mathbf{W}$ é uma pseudovariedade se e só se $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}$ ou $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$. Apesar da sua definição aparentemente simples, o cálculo de supremos é pois um problema bastante difícil e parco de resultados generalizáveis. Os casos específicos em que se consegue calcular o supremo de duas pseudovariedades prendem-se sempre com propriedades específicas de cada uma das pseudovariedades envolvidas.

Antes do desenvolvimento da teoria das operações implícitas por Almeida poucos resultados se conheciam. No entanto, apesar de hoje a situação se ter modificado, muitos supremos continuam por calcular.

Nos exemplos de cálculo de supremos que apresentamos em seguida, utilizaremos essencialmente três estratégias:

- *abordagem estrutural*: dadas duas pseudovariedades $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ e $\mathbf{U}$ um candidato a supremo de $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$, se cada semigrupo de $\mathbf{U}$ divide um produto $S \times T$ com $S \in \mathbf{V}$ e $T \in \mathbf{W}$, então $\mathbf{V} \vee \mathbf{W} = \mathbf{U}$.

- *abordagem sintáctica*: dadas duas pseudovariedades $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$, estudamos todas as operações implícitas sobre uma pseudovariedade $\mathbf{U}$ que contenha $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$. A ideia é mostrar que se uma pseudoidentidade sobre $\mathbf{U}$ é satisfeita por $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ então ela é trivial.

- podemos ainda utilizar o conhecimento das variedades de linguagens associadas às pseudovariedades cujo supremo queremos calcular.

Exemplo 4.1 *Consideremos as seguintes pseudovariedades dos semigrupos zero à esquerda, dos semigrupos zero à direita e das bandas rectangulares:*

$$\mathbf{K_1} = [\![xy = x]\!], \quad \mathbf{D_1} = [\![xy = y]\!] \quad e \quad \mathbf{RB} = [\![xyx = x]\!] = [\![xyz = xz, x^2 = x]\!].$$

Seja $\mathbf{RB}$ *o candidato a supremo de* $\mathbf{K_1}$ *e* $\mathbf{D_1}$.

Uma vez que $\mathbf{K_1}$ *e* $\mathbf{D_1}$ *verificam a pseudoidentidade que define* $\mathbf{RB}$, *vem que* $\mathbf{K_1} \vee \mathbf{D_1} \subseteq \mathbf{RB}$. *Para provar a inclusão contrária, precisamos de um lema que se prova facilmente:*

Lema 4.2 *Sejam* $u, v \in \hat{F}_A(\mathbf{RB})$. *Então:*

(i) $\mathbf{K_1} \models u = v$ *se e só se a primeira letra de* u *é igual à primeira letra de* v.

(ii) $\mathbf{D_1} \models u = v$ *se e só se a última letra de* u *é igual à última letra de* v.

Suponhamos então que $\mathbf{K_1}, \mathbf{D_1} \models u = v$. *Pelo lema anterior, vem que* u *e* v *têm a primeira e a última letras iguais. Consideremos* $u = au'b$ *e* $v = av'b$. *Por definição em* $\mathbf{RB}$

$$u = au'b = ab = av'b = v.$$

Se $u = a$ *(ou* $v = a$*) então facilmente se verifica que, em* $\mathbf{RB}$, $u = v$. *Por conseguinte,* $\mathbf{RB} \models u = v$ *e então* $\mathbf{K_1} \vee \mathbf{D_1} = \mathbf{RB}$.

Notemos que os supremos de pseudovariedades podem, muitas vezes, calcular-se usando qualquer uma das estratégias referidas anteriormente. Em seguida, calcularemos o supremo $\mathbf{K} \vee \mathbf{D}$ seguindo as duas últimas abordagens. Comecemos por calcular este supremo utilizando os conhecimentos das operações implícitas sobre as pseudovariedades $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$ e $\mathcal{L}\mathbf{I}$, ou seja, a *abordagem sintáctica*.

Seja $\mathcal{L}\mathbf{I}$ o candidato a supremo de $\mathbf{K}$ e $\mathbf{D}$. Como $\mathbf{K}, \mathbf{D} \subseteq \mathcal{L}\mathbf{I}$ então é evidente que $\mathbf{K} \vee \mathbf{D} \subseteq \mathcal{L}\mathbf{I}$.

Sejam $\pi, \rho \in \hat{F}_A(\mathcal{L}\mathbf{I})$ e suponhamos que $\mathbf{K}, \mathbf{D} \models \pi = \rho$. Temos uma das seguintes alternativas:

(I) $\pi = \rho \in A^+$ e, neste caso, é claro que $\mathcal{L}\mathbf{I} \models \pi = \rho$.

(II) $\pi = (v, w) \in A^{\mathbb{N}} \times A^{-\mathbb{N}}$ e $\rho = (v', w') \in A^{\mathbb{N}} \times A^{-\mathbb{N}}$ são ambas não explícitas. Por um lado, $p_{\mathbf{K}}(\pi) = v$ e $p_{\mathbf{K}}(\rho) = v'$ e, como $\mathbf{K} \models \pi = \rho$, tem-se $v = v'$. Por outro lado, $\mathbf{D} \models \pi = \rho$ pelo que $w = w'$ uma vez que w e w' são as restrições de π e ρ, respectivamente, a $\mathbf{D}$. De $v = v'$ e $w = w'$ conclui-se que $\mathcal{L}\mathbf{I} \models \pi = \rho$ e portanto $\mathbf{K} \vee \mathbf{D} = \mathcal{L}\mathbf{I}$.

O cálculo deste supremo pode ainda efectuar-se utilizando os conhecimentos acerca das variedades de linguagens associadas a $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$ e $\mathcal{L}\mathbf{I}$.

Seja $\mathbf{U} = \mathbf{K} \vee \mathbf{D}$. Vamos provar que $\mathbf{U} = \mathcal{L}\mathbf{I}$. Já verificámos que a inclusão $\mathbf{U} \subseteq \mathcal{L}\mathbf{I}$ é imediata.

Para mostrar que $\mathcal{L}\mathbf{I} \subseteq \mathbf{U}$, basta recordar que, para um alfabeto A qualquer, $uA^*, A^*u \in \mathcal{U}(A^+)$, pelo que a álgebra de Boole gerada por aquelas linguagens está também contida em $\mathcal{U}(A^+)$. Por conseguinte, pelo Teorema 2.3, $\mathcal{L}\mathbf{I} \subseteq \mathbf{U}$. Conclui-se portanto que $\mathcal{L}\mathbf{I} = \mathbf{K} \vee \mathbf{D}$.

Provámos que $\mathbf{K} \vee \mathbf{D} = \mathbf{LI}$ e também se mostra facilmente que $\mathbf{K} \cap \mathbf{D} = \mathbf{N}$. Tem-se, portanto, o seguinte subreticulado de $\mathcal{P}_S\mathbf{S}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L}\mathbf{I} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \mathbf{K} \arrow[dr, dash] & & \mathbf{D} \arrow[dl, dash] \\ & \mathbf{N} & \end{tikzcd}$$

4.2 Alguns Supremos da forma $\mathbf{G} \vee \mathbf{V}$

Começamos nesta secção por encontrar pseudovariedades da forma $\mathbf{G} \vee \mathbf{V}$, onde $\mathbf{V}$ é uma das pseudovariedades $\mathbf{N}$, $\mathcal{L}\mathbf{I}$, $\mathbf{K}$ ou $\mathbf{D}$, utilizando a *estratégia estrutural*. Note-se que todas as pseudovariedades referidas estão contidas em $\mathcal{L}\mathbf{G} = [\![(x^\omega y^\omega x^\omega)^\omega = x^\omega]\!]$. Prova-se que um semigrupo finito $S \in \mathcal{L}\mathbf{G}$ se e só se todos os idempotentes de S pertencem ao ideal mínimo de S, uma prova pode ser encontrada por exemplo em [20].

Terminaremos encontrando o que foi talvez o primeiro supremo obtido usando o Teorema de Reiterman: $\mathbf{G} \vee \mathbf{Com} = \mathbf{ZE}$. Este supremo foi determinado em 1988 por Almeida [2].

Supremo $\mathbf{G} \vee \mathbf{N}$

Vamos pois utilizar a abordagem estrutural para mostrar que o supremo $\mathbf{G} \vee \mathbf{N}$ é a pseudovariedade $\mathbf{IE} = [\![x^\omega = y^\omega]\!]$. É imediato que $\mathbf{G} \vee \mathbf{N} \subseteq \mathbf{IE}$. Para provar a outra inclusão, consideremos um semigrupo $S \in \mathbf{IE}$ e o seu ideal mínimo J. Dado que $\mathbf{IE} \subseteq \mathbf{ZE}$, como já tínhamos referido antes, J é um grupo. Por outro lado, recorde-se que S/J é o semigrupo quociente S/θ_J, definido a partir da *congruência de Rees* sobre S de núcleo J:

$$a \theta_J b \;\; se \;\; a = b \;\; ou \;\; a, b \in J.$$

Como $S \in \mathcal{L}\mathbf{G}$ tem-se ainda que S/J tem $\mathcal{J}$-classes triviais. Em particular a sua $\mathcal{J}$-classe minimal é igual a $\{0\}$ sendo 0 o zero de S/J. Esta descrição corresponde àquela efectuada anteriormente, dos semigrupos nilpotentes, donde $S/J \in \mathbf{N}$.

Considere-se a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : S & \longrightarrow & J \times S/J \\ x & \longmapsto & (x^{\omega+1}, x/J) \end{array}.$$

Vamos provar que φ é um homomorfismo injectivo.

Sejam $x, y \in S$ e suponhamos que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Então $x/J = y/J$ e, por definição de θ_J, $x = y$ ou $x, y \in J$. Consideremos o segundo caso. Como $x \in J$, $x^{\omega+1} = x^\omega x = x$ pois x^ω é a identidade do grupo J. De igual modo, $y^{\omega+1} = y$. Como, por hipótese, $x^{\omega+1} = y^{\omega+1}$ tem-se que $x = y$. Provou-se assim que φ é injectiva.

Resta mostrar que φ é homomorfismo. Tem-se que

$$\begin{array}{rcl} \varphi(xy) & = & ((xy)^{\omega+1}, xy/J) \quad e \\ \varphi(x)\varphi(y) & = & (x^{\omega+1}, x/J)(y^{\omega+1}, y/J) = (x^{\omega+1}y^{\omega+1}, xy/J). \end{array}$$

Logo, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ se e só se $(xy)^{\omega+1} = x^{\omega+1}y^{\omega+1}$. Ora como $x \in S$ e $S \in \mathbf{IE}$ tem-se que

$$\begin{array}{rcl} (xy)^{\omega+1} & = & (xy)^\omega xy = x^\omega xy \quad e \\ x^{\omega+1}y^{\omega+1} & = & x^\omega xy^\omega y = x^\omega x x^\omega y = x^\omega x^{\omega+1} y = x^\omega x^\omega xy = x^\omega xy. \end{array}$$

Provou-se, assim, que φ é um homomorfismo injectivo de S num produto directo de elementos de $\mathbf{G}$ e $\mathbf{N}$, ou seja provamos que S pertence a $\mathbf{G} \vee \mathbf{N}$.

Supremo $\mathbf{G} \vee \mathcal{L}\mathbf{I}$

Para provar que $\mathbf{G} \vee \mathcal{L}\mathbf{I} = [\![x^\omega y^\omega x^\omega = x^\omega]\!]$ necessitamos do seguinte lema.

Lema 4.3 *Se S é um semigrupo de $\mathcal{L}\mathbf{G}$, a equivalência $\mathcal{H}$ sobre S é uma congruência.*

Prova: Seja S um semigrupo de $\mathcal{L}\mathbf{G}$. Vamos provar que $\mathcal{H}$ é uma congruência esquerda, ou seja, para todos os $s, t, a \in S$, se $s \,\mathcal{H}\, t$ então $as \,\mathcal{H}\, at$. Comecemos então por supor que $s \,\mathcal{H}\, t$. Podemos assumir ainda que $s \neq t$. Como $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ vem que $s \,\mathcal{L}\, t$. Pela Proposição 1.18, existem $x, y \in S$ tais que

$$xs = t \quad e \quad yt = s.$$

São válidas as igualdades

$$s = yt = y(xs) = (yx)s = (yx)^2 s = (yx)^\omega s.$$

Conclui-se que $\mathcal{J}_s \leq \mathcal{J}_{(yx)^\omega}$ e, como todos os idempotentes de S estão no seu ideal mínimo J, tem-se que $s \in J$. De igual modo se mostra que $t \in J$.

Na observação que segue o Teorema de Green já tínhamos afirmado que todas as $\mathcal{H}$-classes de uma $\mathcal{J}$-classe mínima são grupos. Por conseguinte, $s = s^\omega s = s^{\omega+1}$ e, de igual modo, $t = t^{\omega+1}$. Por outro lado, vem que $as^\omega \in J$ e $s^\omega = t^\omega$ já que $s\mathcal{H}t$.

Finalmente, prova-se [25] que se $r, p \in J$ então $rp\,\mathcal{R}\,r$ e $rp\,\mathcal{L}\,p$. Logo $as = as^{\omega+1} = (as^\omega)s \in R_{as^\omega}$ e $at \in R_{at^\omega} = R_{as^\omega}$ e ainda as, $at \in L_s = L_t = L$.

Conclui-se que

$$as,\ at \in R_{as^\omega} \cap L,$$

donde $as\,\mathcal{H}\,at$, o que prova que $\mathcal{H}$ é uma congruência esquerda. De igual modo se mostra que $\mathcal{H}$ é uma congruência direita, o que conclui a demonstração do lema. □

Estamos agora em condições de provar que $\mathbf{G} \vee \mathcal{L}\mathbf{I} = [\![x^\omega y^\omega x^\omega = x^\omega]\!]$.

É imediato que $\mathbf{G} \vee \mathcal{L}\mathbf{I} \subseteq [\![x^\omega y^\omega x^\omega = x^\omega]\!]$. Vamos provar a outra inclusão. Seja $S \in [\![x^\omega y^\omega x^\omega = x^\omega]\!]$ e seja e um idempotente de S. Sabe-se que H_e é um grupo. Repare-se que $[\![x^\omega y^\omega x^\omega = x^\omega]\!] \subseteq \mathcal{L}\mathbf{G}$ e prova-se facilmente que $\mathcal{L}\mathbf{I} = \mathcal{L}\mathbf{G} \cap \mathbf{A}$ onde $\mathbf{A}$ é a pseudovariedade de todos os semigrupos finitos aperiódicos.

Como, pelo lema anterior, $\mathcal{H}$ é uma congruência, podemos construir o semigrupo quociente $S/\mathcal{H}$. Assim, as $\mathcal{H}$-classes de $S/\mathcal{H}$ são triviais e portanto $S/\mathcal{H} \in \mathcal{L}\mathbf{I}$, uma vez que $S \in \mathcal{L}\mathbf{G}$.

Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \phi : & S & \longrightarrow & H_e \times S/\mathcal{H} \\ & x & \longmapsto & (exe, x/\mathcal{H}) \end{array}.$$

Vamos mostrar que S divide $H_e \times S/\mathcal{H}$. É imediato que ϕ é injectiva. Vamos provar que é um homomorfismo. Para quaisquer $x, y \in S$, tem-se

$$\begin{aligned} \phi(xy) &= (exye, xy/\mathcal{H}) \quad e \\ \phi(x)\phi(y) &= (exe, x/\mathcal{H})(eye, y/\mathcal{H}) = ((exe)(eye), xy/\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Logo $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ se e só se $exye = (exe)(eye)$. A estrutura da $\mathcal{J}$-classe minimal de S é a seguinte:

$e\ ;\ fg$	$\cdots$	$ex\ ;\ f$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$ye\ ;\ g$	$\cdots$	$\cdots$

onde f e g são os elementos neutros dos grupos H_{ex} e H_{ye}. Vem que

$$exf = ex \quad e \quad gye = ye.$$

Como $x \in S$ e $S \in [\![x^\omega y^\omega x^\omega = x^\omega]\!]$ sabemos ainda que $(fg)^2 = fgfg = (fgf)g = fg$, donde fg é idempotente. Então, dado que $fg \in H_e$, tem-se $fg = e$ e

$$exye = (exf)(gye) = ex(fg)ye = exeye = (exe)(eye).$$

Donde se conclui que ϕ é um homomorfismo. Provou-se assim que S divide $H_e \times S/\mathcal{H}$ e portanto que S pertence a $\mathbf{G} \vee \mathcal{L}\mathbf{I}$.

De igual forma se prova que

$$\mathbf{G} \vee \mathbf{K} = [\![x^\omega y^\omega = x^\omega]\!] \quad e \quad \mathbf{G} \vee \mathbf{D} = [\![x^\omega y^\omega = y^\omega]\!].$$

Supremo $\mathbf{G} \vee$ Com

Tanto os grupos como os semigrupos comutativos têm idempotentes centrais pelo que a pseudovariedade **ZE** se apresenta como um bom candidato para supremo de **G** e **Com**.

Uma vez que **ZE** satisfaz a pseudoidentidade $x^\omega y = yx^\omega$, a descrição das operações implícitas de $\hat{F}_{A_m}(\mathbf{ZE})$ que efectuamos no capítulo anterior é equivalente à que se segue:

Teorema 4.4 *Seja $\pi \in \hat{F}_{A_m}(\mathbf{ZE})$. Então π é da forma*

$$\pi = w_0\rho_1(ea_1, ..., ea_n)w_1...w_{k-1}\rho_k(ea_1, ..., ea_n)$$

onde $k > 0$, $n \leq m$, cada w_i é uma palavra sobre $A_m \backslash A_n$, w_0 pode ser a palavra vazia, $e = (a_1...a_n)^\omega$, cada $\rho_i \in \hat{F}_{A_n}(\mathbf{G})$ e somente para $i = k$ se pode ter $\rho_i(ea_1, ..., ea_n) = e$.

Consideremos agora o seguinte resultado acerca de grupos finitos.

Lema 4.5 *Sejam*

$$\begin{aligned} \pi_1 &= w_0\rho_1(ea_1, ..., ea_n)w_1...w_{k-1}\rho_k(ea_1, ..., ea_n) \\ \pi_2 &= \sigma_1(ea_1, ..., ea_n)v_1...v_{l-1}\sigma_l(ea_1, ..., ea_n) \end{aligned}$$

duas operações implícitas sobre **ZE** *da forma descrita no teorema anterior. Se* $\mathbf{G} \models \pi_1 = \pi_2$ *e* $\mathbf{G} \not\models \sigma_1 = 1$ *então* $w_0 = 1$.

Prova: Suponhamos que $\mathbf{G} \models \pi_1 = \pi_2$ e $\mathbf{G} \not\models \sigma_1 = 1$. Vamos substituir todas as variáveis $a_1, ..., a_n$ de π_1 e π_2 por a_1^ω. Então dado que $G \models a_1^\omega = 1$, de $\mathbf{G} \models \pi_1 = \pi_2$ deduz-se que $\mathbf{G} \models w_0...w_{k-1} = v_1...v_{l-1}$. Uma vez que $\mathbf{G}$ não satisfaz nenhuma identidade não trivial, é válida a igualdade $w_0...w_{k-1} = v_1...v_{l-1}$, donde é imediato que $|w_0...w_{k-1}| = |v_1...v_{l-1}|$.

Suponhamos, por redução ao absurdo, que $w_0 \neq 1$. Por hipótese, $\mathbf{G}$ não satisfaz $\sigma_1 = 1$. Logo existe um grupo de permutações, digamos S_r, o grupo de todas as permutações de $\{1, ..., r\}$ e existem $b_1, ..., b_n \in S_r$, tais que $(\sigma_1)_{S_r}(b_1, ..., b_n) \neq id$.

Sem perda de generalidade podemos supôr que

$$(\sigma_1)_{S_r}(b_1, ..., b_n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & r \\ \alpha & * & ... & * \end{pmatrix}$$

onde $\alpha \in \{2, ..., r\}$.

Consideremos agora o grupo de permutações S_t onde $t = r + |v_1...v_{l-1}|$ e o ciclo $c = (\alpha \;\; r+1 \;\; r+2 \;\; ... \;\; t)$ de S_t.

Substituindo em π_1 e π_2 todos os $a_1, ..., a_n$ por $b_1, ..., b_n$, respectivamente e todas as letras de $w_0...w_{k-1}$ e $v_1...v_{l-1}$ por c obtêm-se permutações p_1 e p_2 de S_t. Como $|w_0w_1...w_{k-1}| = |v_1...v_{l-1}|$ temos que p_1 e p_2 são composições que incluem o mesmo número de ciclos c. No entanto, enquanto que em p_1 o primeiro ciclo c da composição faz corresponder 1 a 1, em p_2 a primeira permutação da composição é σ_1 que faz corresponder a 1 o elemento α. Continuando este raciocínio facilmente se conclui que $p_2(1) = s$ enquanto que $p_1(1) < s$ portanto $\pi_1 \neq \pi_2$ em S_t o que é absurdo. Este resultou de supormos que $w_0 \neq 1$. Portanto se $\mathbf{G} \models \pi_1 = \pi_2$ e $\mathbf{G} \not\models \sigma_1 = 1$, então $w_0 = 1$, como queríamos demonstrar. $\square$

Vamos agora provar que $\mathbf{G} \vee \mathbf{Com} = \mathbf{ZE}$ bem como a unicidade da factorização que foi enunciada no Teorema 4.4.

Teorema 4.6 *Sejam*

$$\begin{aligned} \pi_1 &= w_0\rho_1(ea_1, ..., ea_n)w_1...w_{k-1}\rho_k(ea_1, ..., ea_n) \\ \pi_2 &= v_0\sigma_1(fb_1, ..., fb_q)v_1...v_{l-1}\sigma_l(fb_1, ..., fb_q) \end{aligned}$$

duas factorizações de operações implícitas sobre $\mathbf{ZE}$ *da forma descrita anteriormente. Se* $\mathbf{G} \vee \mathbf{Com} \models \pi_1 = \pi_2$*, então* $k = l$*,* $w_i = v_i$*,* $n = q$ *e* $\rho_{i+1} = \sigma_{i+1} \;\; (i = 0, ..., k-1)$.

Em particular, $\mathbf{G} \vee \mathbf{Com} = \mathbf{ZE}$ *e a factorização dada pelo Teorema* 4.4 *é única.*

Prova: É evidente que $\mathbf{G} \vee \mathbf{Com} \subseteq \mathbf{ZE}$.

Suponhamos agora que $\mathbf{G} \vee \mathbf{Com} \models \pi_1 = \pi_2$ e, por conseguinte, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{Com}$ satisfazem $\pi_1 = \pi_2$.

Suponhamos que $a_1 \notin \{b_1, ..., b_q\}$ e consideremos um monóide monogénico aperiódico $M = \langle s \rangle$, gerado por $s \in M$, de índice $i = |v_0...v_{l-1}| + 1$.

Vamos substituir em π_1 e π_2 todas as letras por 1 excepto a_1 que substituimos por s. Então, o valor de $(\pi_1)_M$ nesse ponto de $M^{|A|}$ é

$$1\rho_1(s^\omega s, ..., s^\omega)1...1\rho_k(s^\omega s, ..., s^\omega) = 1a^\omega 1...1a^\omega = a^\omega = 0$$

No que concerne $(\pi_2)_M$ surgem duas situações:

(I) a_1 não ocorre em $v_0...v_{l-1}$. Neste caso o valor de $(\pi_2)_M$ é 1.

(II) a_1 ocorre r vezes em $v_0...v_{l-1}$. Neste caso o valor de $(\pi_2)_M$ é a^r. Note-se que r é inferior a i, donde $a^r \neq 0$.

Em qualquer das situações $(\pi_1)_M \neq (\pi_2)_M$ o que é absurdo pois $M \in \mathbf{Com}$ e $\mathbf{Com} \models \pi_1 = \pi_2$. O absurdo resultou de supormos que $a_1 \notin \{b_1, ..., b_q\}$. Com um raciocínio análogo prova-se que $a_2, ..., a_n \in \{b_1, ..., b_q\}$. Donde, por simetria, $\{a_1, ..., a_n\} = \{b_1, ..., b_q\}$ e, consequentemente $(a_1...a_n)^\omega = (b_1...b_q)^\omega$, isto é, $e = f$.

Dado que $\mathbf{G} \models \pi_1 = \pi_2$, a prova pode ser concluída por indução usando o lema anterior. □

4.3 Alguns Supremos da forma $\mathcal{L}\mathbf{I} \vee \mathbf{V}$

Consideremos a pseudovariedade $\mathbf{T} = [\![ab^\omega c = (ab^\omega c)^{\omega+1}]\!]$. Como se pode verificar $\mathbf{G}$, $\mathbf{B}$, $\mathcal{L}\mathbf{I}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{CR}$, a classe de todos os semigrupos finitos completamente regulares, são subpseudovariedades de $\mathbf{T}$, enquanto que $\mathbf{Com}$ e $\mathbf{J}$, a classe de todos os semigrupos finitos em que $\mathcal{J}$ é trivial, não o são.

Neste capítulo efectuaremos o cálculo dos supremos da forma $\mathcal{L}\mathbf{I} \vee \mathbf{V}$, onde $\mathbf{V}$ é uma subpseudovariedade de $\mathbf{T}$.

Apresentamos, em seguida, alguns operadores no reticulado das pseudovariedades relevantes nesta secção.

Seja $\mathbf{V}$ uma pseudovariedade e seja Σ um conjunto de pseudoidentidades que define $\mathbf{V}$. Prova-se [19] que os seguintes operadores estão bem definidos (ou seja, não dependem do conjunto Σ considerado):

- $\mathcal{U}\mathbf{V} = [\![a^\omega b\pi cd^\omega = a^\omega b\rho cd^\omega \,|\, \pi = \rho \in \Sigma]\!]$;
- $\mathcal{U}_l\mathbf{V} = [\![a^\omega b\pi = a^\omega b\rho | \pi = \rho \in \Sigma]\!]$;
- $\mathcal{U}_r\mathbf{V} = [\![\pi ba^\omega = \rho ba^\omega \,|\, \pi = \rho \in \Sigma]\!]$.

Considerem-se ainda os operadores $\mathcal{L}\mathbf{V}$, respectivamente $\mathcal{L}_l\mathbf{V}$, $\mathcal{L}_r\mathbf{V}$, definidos pelo conjunto de todas as pseudoidentidades que se obtêm de Σ substituindo cada variável b por $a^\omega ba^\omega$, respectivamente $a^\omega b, ba^\omega$. Por exemplo,

$\mathcal{L}_l\mathbf{CR} = [\![a^\omega b = (a^\omega b)^{\omega+1}]\!]$ e $\mathcal{L}_r\mathbf{CR} = [\![ba^\omega = (ba^\omega)^{\omega+1}]\!]$. Este operador permite-nos caracterizar a pseudovariedade $\mathbf{T}$ de forma alternativa:

$$\mathbf{T} = \mathcal{L}_l\mathbf{CR} \cap \mathcal{L}_r\mathbf{CR}.$$

A inclusão de $\mathbf{T}$ em $\mathcal{L}_l\mathbf{CR} \cap \mathcal{L}_r\mathbf{CR}$ é evidente. Reciprocamente $\mathcal{L}_l\mathbf{CR} \cap \mathcal{L}_r\mathbf{CR}$ satisfaz

$$ab^\omega c = (ab^\omega)^{\omega+1}c = (ab^\omega)^\omega ab^\omega c = ((ab^\omega)^\omega ab^\omega c)^{\omega+1} = (ab^\omega c)^{\omega+1},$$

o que prova a inclusão contrária.

Antes de apresentarmos o teorema principal desta secção são necessários os seguintes resultados.

Lema 4.7 ([19]) *Sejam π, $\rho \in \hat{F}_A(\mathbf{S})\backslash A^+$. Se $\mathcal{L}\mathbf{I}$ (respectivamente $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$) satisfaz a pseudoidentidade $\pi = \rho$, então existem σ, $\theta, x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{S})$, com $\sigma, \theta \notin A^+$ tais que $\pi = \sigma x\theta$ e $\rho = \sigma y\theta$ (respectivamente $\pi = \sigma x$ e $\rho = \sigma y, \pi = x\theta$ e $\rho = y\theta$).*

Lema 4.8 ([5]) *Seja $\mathbf{V}$ uma pseudovariedade de semigrupos e seja $\pi \in \hat{F}_A(\mathbf{V})\backslash A^+$. Então existem $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \hat{F}_A(\mathbf{V})$ tais que $\pi = \pi_1\pi_2^\omega\pi_3$.*

Como nos propusemos no início desta secção, apresentamos em seguida o resultado que nos dá os supremos da forma $\mathcal{L}\mathbf{I} \vee \mathbf{V}$, onde $\mathbf{V}$ é uma subpseudovariedade de $\mathbf{T}$.

Teorema 4.9 ([19]) *Seja $\mathbf{V}$ uma subpseudovariedade de, respectivamente, $\mathcal{L}_l\mathbf{CR} \cap \mathcal{L}_r\mathbf{CR}$, $\mathcal{L}_r\mathbf{CR}$ ou $\mathcal{L}_l\mathbf{CR}$. Então, tem-se respectivamente,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\mathbf{I} \vee \mathbf{V} &= \mathcal{U}\mathbf{V} \cap \mathcal{L}_l\mathbf{CR} \cap \mathcal{L}_r\mathbf{CR} \\
\mathbf{K} \vee \mathbf{V} &= \mathcal{U}_l\mathbf{V} \cap \mathcal{L}_r\mathbf{CR} \\
\mathbf{D} \vee \mathbf{V} &= \mathcal{U}_r\mathbf{V} \cap \mathcal{L}_l\mathbf{CR}.
\end{aligned}$$

Prova: Efectuaremos a prova apenas para a pseudovariedade $\mathbf{D}$ uma vez que as outras são análogas. É trivial que $\mathbf{D} \vee \mathbf{V} \subseteq \mathcal{U}_r\mathbf{V} \cap \mathcal{L}_l\mathbf{CR}$. Reciprocamente, suponhamos que $\mathbf{D} \vee \mathbf{V} \models \pi = \rho$. Então verifica-se uma das seguintes alternativas:

(I) $\pi = \rho \in A^+$ e, neste caso, é claro que $\mathcal{U}_r\mathbf{V} \cap \mathcal{L}_l\mathbf{CR} \models \pi = \rho$.

(II) π e ρ são ambas não explícitas.

No último caso, como $\mathbf{D} \models \pi = \rho$, pelo Lema 4.7, existem $\theta, x, y \in \hat{F}_A(\mathbf{S})$, com $\theta \notin A^+$ tais que $\pi = x\theta$ e $\rho = y\theta$. Por outro lado, $\theta \notin A^+$ está nas condições do Lema 4.8, donde $\theta = \theta_1\theta_2^\omega\theta_3$ para alguns $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \hat{F}_A(\mathbf{S})$.

Assim, $\mathcal{L}_l\mathbf{CR}$ satisfaz as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\pi &= x\theta_1\theta_2^\omega\theta_3\\ &= x\theta_1(\theta_2^\omega\theta_3)^{\omega+1}\\ &= x\theta_1\theta_2^\omega\theta_3(\theta_2^\omega\theta_3)^\omega\\ &= x\theta(\theta_2^\omega\theta_3)^\omega\\ &= \pi(\theta_2^\omega\theta_3)^\omega\end{aligned}$$

De igual modo se mostra que $\rho = \rho(\theta_2^\omega\theta_3)^\omega$.

Por último, como $\mathbf{V} \models \pi = \rho$, resulta da definição de $\mathcal{U}_r\mathbf{V}$, que $\mathcal{U}_r\mathbf{V}$ satisfaz $\pi(\theta_2^\omega\theta_3)^\omega = \rho(\theta_2^\omega\theta_3)^\omega$.

Conclui-se que

$$\mathcal{U}_r\mathbf{V} \cap \mathcal{L}_l\mathbf{CR} \models \pi = \pi(\theta_2^\omega\theta_3)^\omega = \rho(\theta_2^\omega\theta_3)^\omega = \rho.$$

□

O seguinte corolário permite simplificar o resultado anterior.

Corolário 4.10 ([19]) *Seja* $\mathbf{V} = [\![\Sigma]\!]$ *uma pseudovariedade tal que* $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{L}_l\mathbf{CR} \cap \mathcal{L}_r\mathbf{CR}$. *Então*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\mathbf{I} \vee \mathbf{V} &= [\![a^\omega\pi d^\omega = a^\omega\rho d^\omega | \pi = \rho \in \Sigma]\!] \cap \mathcal{L}_l\mathbf{CR} \cap \mathcal{L}_r\mathbf{CR}\\ \mathbf{K} \vee \mathbf{V} &= [\![a^\omega\pi = a^\omega\rho | \pi = \rho \in \Sigma]\!] \cap \mathcal{L}_l\mathbf{CR} \cap \mathcal{L}_r\mathbf{CR}\\ \mathbf{D} \vee \mathbf{V} &= [\![\pi d^\omega = \rho d^\omega | \pi = \rho \in \Sigma]\!] \cap \mathcal{L}_l\mathbf{CR} \cap \mathcal{L}_r\mathbf{CR}.\end{aligned}$$

Prova: Vamos demostrar o resultado apenas para $\mathbf{D}$.
Seja $\mathbf{W} = [\![\pi d^\omega = \rho d^\omega | \pi = \rho \in \Sigma]\!]$. É trivial que $\mathbf{D} \vee \mathbf{V} \subseteq \mathbf{W} \cap \mathcal{L}_l\mathbf{CR} \cap \mathcal{L}_r\mathbf{CR}$. Uma vez que já provámos que $\mathbf{D} \vee \mathbf{V} = \mathcal{U}_r\mathbf{V} \cap \mathcal{L}_l\mathbf{CR}$, só falta estabelecer que $\mathbf{W} \cap \mathcal{L}_r\mathbf{CR} \subseteq \mathcal{U}_r\mathbf{V}$.

Seja $\pi = \rho$ uma pseudoidentidade de Σ. Temos que $\mathcal{L}_r\mathbf{CR}$ satisfaz

$$\pi b a^\omega = \pi (b a^\omega)^{\omega+1} = \pi (b a^\omega)^\omega b a^\omega.$$

De igual modo, $\mathcal{L}_r\mathbf{CR} \models \rho b a^\omega = \rho (b a^\omega)^\omega b a^\omega$. Como $\mathbf{W} \models \pi (b a^\omega)^\omega b a^\omega = \rho (b a^\omega)^\omega b a^\omega$, tem-se que $\mathbf{W} \cap \mathcal{L}_r\mathbf{CR} \models \pi b a^\omega = \rho b a^\omega$. Deduz-se assim que $\mathbf{W} \cap \mathcal{L}_r\mathbf{CR} \subseteq \mathcal{U}_r\mathbf{V}$, como queríamos demonstrar. □

Já referimos que $\mathbf{B} = [\![a = a^2]\!]$ é subpseudovariedade de $\mathbf{T}$. Então, pelo resultado anterior, temos os seguintes supremos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\mathbf{I} \vee \mathbf{B} &= [\![a^\omega b c^\omega = a^\omega b^2 c^\omega , a^\omega b = (a^\omega b)^2, b a^\omega = (b a^\omega)^2]\!] \\
\mathbf{K} \vee \mathbf{B} &= [\![a^\omega b = a^\omega b^2, a^\omega b = (a^\omega b)^2, b a^\omega = (b a^\omega)^2]\!] \\
\mathbf{D} \vee \mathbf{B} &= [\![b a^\omega = b^2 a^\omega, a^\omega b = (a^\omega b)^2, b a^\omega = (b a^\omega)^2]\!].
\end{aligned}$$

Repare-se no caso do supremo $\mathbf{K} \vee \mathbf{B}$. Esta pseudovariedade satisfaz $a^\omega b = a^\omega b^2$. Substituindo b por $a^\omega b$ vem que $a^\omega(a^\omega b) = a^\omega(a^\omega b)^2$, ou seja, $a^\omega b = (a^\omega b)^2$. A segunda pseudoidentidade torna-se pois redundante. Dualmente, $b a^\omega = (b a^\omega)^2$ é consequência de $b a^\omega = b^2 a^\omega$.

Obtemos simplesmente

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} \vee \mathbf{B} &= [\![a^\omega b = a^\omega b^2, b a^\omega = (b a^\omega)^2]\!] \\
\mathbf{D} \vee \mathbf{B} &= [\![b a^\omega = b^2 a^\omega, a^\omega b = (a^\omega b)^2]\!].
\end{aligned}$$

Uma vez que $\mathbf{CR}$ também é subpseudovariedade de $\mathbf{T}$, podemos deduzir ainda os seguintes supremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\mathbf{I} \vee \mathbf{CR} &= [\![a^\omega b c^\omega = a^\omega b^{\omega+1} c^\omega, a^\omega b = (a^\omega b)^{\omega+1}, b a^\omega = (b a^\omega)^{\omega+1}]\!] \\
\mathbf{K} \vee \mathbf{CR} &= [\![a^\omega b = a^\omega b^{\omega+1}, a^\omega b = (a^\omega b)^{\omega+1}, b a^\omega = (b a^\omega)^{\omega+1}]\!] \\
\mathbf{D} \vee \mathbf{CR} &= [\![b a^\omega = b^{\omega+1} a^\omega, a^\omega b = (a^\omega b)^{\omega+1}, b a^\omega = (b a^\omega)^{\omega+1}]\!].
\end{aligned}$$

Também estes supremos podem ser apresentados de forma mais simples. Basta notar que

(I) provámos, no início da secção que as pseudoidentidades $a^\omega b = (a^\omega b)^{\omega+1}$ e $ba^\omega = (ba^\omega)^{\omega+1}$ podem ser substituídas pela pseudoidentidade $ab^\omega c = (ab^\omega c)^{\omega+1}$;

(II) Como $\mathbf{K} \vee \mathbf{CR} \models a^\omega b = a^\omega b^{\omega+1}$ então, substituindo b por $a^\omega b$, vem que $a^\omega(a^\omega b) = a^\omega(a^\omega b)^{\omega+1}$, isto é, $a^\omega b = (a^\omega b)^{\omega+1}$. Dualmente para $\mathbf{D} \vee \mathbf{CR}$.

Obtemos assim

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathbf{I} \vee \mathbf{CR} &= [\![a^\omega b c^\omega = a^\omega b^{\omega+1} c^\omega, ab^\omega c = (ab^\omega c)^{\omega+1}]\!] \\ \mathbf{K} \vee \mathbf{CR} &= [\![a^\omega b = a^\omega b^{\omega+1}, ba^\omega = (ba^\omega)^{\omega+1}]\!] \\ \mathbf{D} \vee \mathbf{CR} &= [\![ba^\omega = b^{\omega+1} a^\omega, a^\omega b = (a^\omega b)^{\omega+1}]\!]. \end{aligned}$$

Capítulo 5

Desenvolvimentos

Já tivémos oportunidade de referir que, apesar da sua definição simples e natural, pouco se sabe do supremo de pseudovariedades em geral, mesmo em certos casos em que estas são bem conhecidas.

Alguns supremos podem ser encontrados explicitamente. Apesar de se conhecerem poucos métodos, a teoria das operações implícitas, desenvolvida por Almeida, contribuiu para alguns avanços nos cálculos onde as estratégias algébricas falhavam. É o caso do supremo $\mathbf{G} \vee \mathbf{Com}$, que descrevemos no capítulo anterior. Outro exemplo clássico é o cálculo de $\mathbf{R} \vee \mathbf{L}$, o supremo das pseudovariedades dos semigrupos $\mathcal{R}$-triviais e $\mathcal{L}$-triviais. Almeida e Azevedo [7] mostraram que

$$\mathbf{R} \vee \mathbf{L} = [\![(xy)^\omega x(zx)^\omega = (xy)^\omega (zx)^\omega]\!].$$

Muitos mais resultados acerca de supremos de pseudovariedades foram provados depois destes.

Para a pseudovariedade $\mathbf{Com}$ dos semigrupos comutativos, Almeida [2, 5] provou as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\mathbf{I} \vee \mathbf{Com} &= \mathbf{Perm} = [\![x^\omega yzt^\omega = x^\omega zyt^\omega]\!] \\
\mathbf{K} \vee \mathbf{Com} &= \mathbf{L}_{\mathbf{Com}} = [\![x^\omega yz = x^\omega zy]\!] \\
\mathbf{D} \vee \mathbf{Com} &= \mathbf{R}_{\mathbf{Com}} = [\![yzx^\omega = zyx^\omega]\!] \\
\mathbf{N} \vee \mathbf{Com} &= [\![x^\omega y = yx^\omega, x^\omega yz = x^\omega zy]\!] = \mathbf{ZE} \cap \mathbf{L}_{\mathbf{Com}}.
\end{aligned}$$

Se $\mathbf{V}$ é uma das pseudovariedades $\mathcal{L}\mathbf{I}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{D}$ ou $\mathbf{N}$ temos ainda o seguinte resultado clássico:

$$\mathbf{V} \vee \mathbf{Ab} = \mathbf{V} \vee (\mathbf{G} \cap \mathbf{Com}) = (\mathbf{V} \vee \mathbf{G}) \cap (\mathbf{V} \vee \mathbf{Com}).$$

onde $\mathbf{Ab}$ é a pseudovariedade dos grupos abelianos.

Seja $\mathcal{M}\mathbf{N}$, a pseudovariedade gerada pelos monóides M nos quais cada idempotente de $M \setminus \{1\}$ é um zero. Almeida[5] e Azevedo[15, 16] efectuaram ainda os seguintes cálculos.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} \vee \mathcal{M}\mathbf{N} &= [\![x^\omega y^\omega z = x^\omega z y^\omega, x^\omega = x^{\omega+1}]\!] \\
\mathbf{K} \vee \mathbf{J} &= [\![a^\omega x(yz)^\omega = a^\omega x(zy)^\omega, x^\omega = x^{\omega+1}]\!] \\
\mathcal{L}\mathbf{I} \vee \mathbf{J} &= [\![a^\omega b(cd)^\omega e f^\omega = a^\omega b(dc)^\omega e f^\omega, a^\omega = a^{\omega+1}]\!].
\end{aligned}$$

Azevedo e Zeitoun [17] usando métodos combinatórios, algébricos e topológicos, calcularam supremos envolvendo as pseudovariedades $\mathbf{G}$ e $\mathbf{D}$ e ainda $\mathcal{M}\mathbf{K}$, a pseudovariedade gerada pelos monóides M nos quais cada idempotente de $M \setminus \{1\}$ é um zero à esquerda.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\mathbf{K} \vee \mathbf{G} &= [\![x^\omega y x^\omega = x^\omega y]\!] \\
\mathcal{M}\mathbf{K} \vee \mathbf{D} &= [\![x^\omega y x^\omega z t^\omega = x^\omega y z t^\omega, x^\omega = x^{\omega+1}]\!] \\
\mathcal{M}\mathbf{K} \vee \mathbf{D} \vee \mathbf{G} &= [\![x^\omega y x^\omega z t^\omega = x^\omega y z t^\omega]\!].
\end{aligned}$$

Muitas vezes, apenas se consegue provar que o supremo de duas pseudovariedades é *finitamente baseado*, isto é, que é definido por um número finito de pseudoidentidades. Almeida [3], por exemplo, provou que todas as pseudovariedades comutativas são finitamente baseadas. Por outro lado, Volkov [31] e Trotter e Volkov [29] deram exemplos de supremos que não são finitamente baseados:

Teorema 5.1 *Seja A_2 o semigrupo sintáctico de $(a+b)^*a^2(a+b)^*$. Seja $\mathbf{V}$ uma pseudovariedade que contém A_2 e seja $\mathbf{H}$ uma pseudovariedade não trivial de grupos. Então $\mathbf{H} \vee \mathbf{V}$ não é finitamente baseado.*

Em particular, $\mathbf{A} \vee \mathbf{G}$ não é finitamente baseado.

Teorema 5.2 *Para qualquer pseudovariedade* $\mathbf{V}$ *entre* $\mathbf{J}$ *e* $\mathbf{A}$ *e qualquer pseudovariedade de grupos não abelianos* $\mathbf{H}$, *o supremo* $\mathbf{V} \vee \mathbf{H}$ *não é finitamente baseado.*

Na maioria dos casos não conhecemos nada acerca da base de pseudoidentidades que descreve determinado supremo e este é um dos principais problemas no que diz respeito às pseudovariedades. O outro problema que ocupa os investigadores é a *decidibilidade*.

Definição 5.3 *Seja* $\mathbf{V}$ *uma pseudovariedade. A pseudovariedade* $\mathbf{V}$ *diz-se* **decidível** *se existir um algoritmo que, dado um semigrupo* S *qualquer, permita decidir se* S *pertence a* $\mathbf{V}$.

Se uma pseudovariedade $\mathbf{V}$ é finitamente baseada e as pseudoidentidades que definem $\mathbf{V}$ podem ser testadas em todos os semigrupos finitos, então $\mathbf{V}$ é decidível. Pode ainda dar-se o caso de uma pseudovariedade finitamente baseada não ser decidível. Veja-se em [6] o caso de $\mathbf{Ab_Q}$, a classe dos semigrupos finitos que são grupos abelianos cuja ordem é produto de elementos de Q, um conjunto não recursivo de primos.

No entanto, há pseudovariedades que não são finitamente baseadas e são decidíveis. Zeitoun [34] provou que o supremo $\mathbf{J} \vee \mathbf{B}$ é um exemplo de tal pseudovariedade. Trotter e Volkov[29] mostraram que o supremo $\mathbf{J} \vee \mathbf{G}$ não é finitamente baseado mas Almeida, Azevedo e Zeitoun [8] provaram a sua decidibilidade.

Azevedo [15] calculou o supremo de subpseudovariedades de $\mathbf{B}$ com subpseudovariedades de $\mathbf{G}$. O reticulado $\mathcal{P}_S(\mathbf{V} \vee \mathbf{W})$ pode, por vezes, ser decomposto no produto directo $\mathcal{P}_S(\mathbf{V}) \times \mathcal{P}_S(\mathbf{W})$. O autor deu um exemplo desta decomposição:

Teorema 5.4 *Seja* $\mathbf{U} = [\![(xy)^\omega = x^\omega y^\omega, x^{\omega+1} = x]\!]$ *e sejam* ϕ *e* ψ *definidas por*

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \mathcal{P}_S(\mathbf{U}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_S(\mathbf{G}) \times \mathcal{P}_S(\mathbf{B}) \\ & & \mathbf{V} & \longmapsto & (\mathbf{V} \cap \mathbf{G}, \mathbf{V} \cap \mathbf{B}) \\ \psi & : & \mathcal{P}_S(\mathbf{G}) \times \mathcal{P}_S(\mathbf{B}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_S(\mathbf{U}) \\ & & (\mathbf{H}, \mathbf{P}) & \longmapsto & \mathbf{H} \vee \mathbf{P} \end{array}$$

Então, ϕ e ψ são isomorfismos mutuamente inversos.

Em particular, $\mathbf{G} \vee \mathbf{B} = \mathbf{U}$ *e se* $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{U}$*, então* $\mathbf{V}$ *é decidível se e só se* $\mathbf{V} \cap \mathbf{G}$ *é decidível.*

A intersecção finita de duas pseudovariedades decidíveis é, obviamente decidível. Porém, com o supremo o mesmo não ocorre. Surpreendentemente, Albert, Baldinger e Rhodes [1] mostraram que o supremo de duas pseudovariedades decidíveis pode não ser decidível.

Teorema 5.5 *É possível encontrar um conjunto de pseudoidentidades Σ tais que o supremo* $[\![\Sigma]\!] \vee \mathbf{Com}$ *não é decidível.*

Os investigadores tentaram então definir propriedades mais fortes do que a decidibilidade. Em 1997, Steinberg e Almeida introduziram a noção de *mansidão* com o objectivo de provar a decidibilidade de produtos semidirectos de pseudovariedades. De facto, em [13], pensaram mesmo ter conseguido provar que o produto semidirecto iterado de pseudovariedades *mansas* seria decidível. Infelizmente a prova de tal resultado baseava-se num resultado de 1995 cuja validade foi posta em causa e ainda não foi demonstrada.

Hoje conhecem-se muitas pseudovariedades que se sabe serem mansas, no entanto, muitas outras bem conhecidas continuam a ocupar os investigadores.

- **G** é mansa [14];
- **K** e **D** são mansas [11];
- **Ab** é mansa [9];
- **LSl** é mansa [22];
- **A** é mansa (resultado apenas anunciado por Rhodes);

No que diz respeito ao operador supremo do reticulado das pseudovariedades, provou-se, para alguns casos particulares, por exemplo $\mathbf{J} \vee \mathbf{G}$ [28], que o supremo de pseudovariedades mansas é ainda manso. No entanto, um resultado genérico que permita afirmar que se duas pseudovariedades forem mansas então o supremo delas ainda é manso e, por conseguinte, decidível ainda não foi anunciado. Muito recentemente, Almeida, Costa e Zeitoun [10] estabeleceram a mansidão de supremos da forma $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ onde $\mathbf{V}$ é uma subpseudovariedade de $\mathbf{J}$ ou a pseudovariedade $\mathbf{R}$. Em particular, demonstraram que os supremos $\mathbf{R} \vee \mathbf{Ab}$, $\mathbf{R} \vee \mathbf{G}$ e $\mathbf{R} \vee \mathbf{CR}$ são decidíveis.

Apêndice A

Lista de Pseudovariedades

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{A} & = & [\![x^{\omega+1} = x^{\omega}]\!] \\
\mathbf{Ab} & = & [\![x^{\omega} = 1, xy = yx]\!] \\
\mathbf{B} & = & [\![x^2 = x]\!] \\
\mathbf{Com} & = & [\![xy = yx]\!] \\
\mathbf{CR} & = & [\![x^{\omega+1} = x]\!] \\
\mathbf{CS} & = & [\![(x^{\omega}yx^{\omega})^{\omega} = x^{\omega}, x^{\omega+1} = x]\!] \\
\mathbf{D} & = & [\![yx^{\omega} = x^{\omega}]\!] \\
\mathbf{D_1} & = & [\![xy = y]\!] \\
\mathbf{G} & = & [\![x^{\omega}y = yx^{\omega} = y]\!] = [\![x^{\omega} = 1]\!] \\
\mathbf{I} & = & [\![x = y]\!] \\
\mathbf{IE} & = & [\![x^{\omega} = y^{\omega}]\!] \\
\mathbf{Inv} & = & [\![x^{\omega}y^{\omega} = y^{\omega}x^{\omega}]\!] \\
\mathbf{J} & = & [\![x^{\omega+1} = x^{\omega}, (xy)^{\omega} = (yx)^{\omega}]\!] \\
\mathbf{K} & = & [\![x^{\omega}y = x^{\omega}]\!] \\
\mathbf{K_1} & = & [\![xy = x]\!] \\
\mathbf{L} & = & [\![y(xy)^{\omega} = (xy)^{\omega}]\!]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{L_{Com}} & = & [\![x^\omega yz = x^\omega zy]\!] \\
\mathcal{L}\mathbf{G} & = & [\![(x^\omega y^\omega x^\omega)^\omega = x^\omega]\!] \\
\mathcal{L}\mathbf{I} & = & [\![x^\omega yx^\omega = x^\omega]\!] \\
\mathcal{M}\mathbf{K} & = & [\![x^\omega yx = x^\omega y]\!] \\
\mathcal{M}\mathbf{N} & = & [\![x^\omega y = yx^\omega, x^{\omega+1} = x^\omega]\!] \\
\mathbf{N} & = & [\![x^\omega y = yx^\omega = x^\omega]\!] = [\![x^\omega = 0]\!] \\
\mathbf{Perm} & = & [\![x^\omega yzt^\omega = x^\omega zyt^\omega]\!] \\
\mathbf{R} & = & [\![(xy)^\omega x = (xy)^\omega]\!] \\
\mathbf{RB} & = & [\![xyx = x]\!] \\
\mathbf{R_{Com}} & = & [\![yzx^\omega = zyx^\omega]\!] \\
\mathbf{S} & = & [\![x = x]\!] \\
\mathbf{Sl} & = & [\![x^2 = x, xy = yx]\!] \\
\mathbf{T} & = & [\![ab^\omega c = (ab^\omega c)^{\omega+1}]\!] \\
\mathbf{ZE} & = & [\![x^\omega y = yx^\omega]\!]
\end{array}
$$

Apêndice B

Tabela para o cálculo de $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$

$\vee$	**G**	**A**	**R**	**L**	**J**	$\mathbf{J} \cap \mathbf{Inv}$	**N**	**K**	**D**	$\mathcal{L}\mathbf{I}$
G	**G**	$(**)$	$(*)$ [10]		$(*)$ [8][28]	$\mathbf{DG} \cap \mathbf{Inv}$ [12]	$\mathbf{V_1}$	$\mathbf{V_2}$	$\mathbf{V_3}$	$\mathbf{V_4}$
A		**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**
R			**R**	$\mathbf{V_5}$	**R**	**R**	**R**	**R**		
L				**L**	**L**	**L**	**L**		**L**	
J					**J**	**J**	**J**	$\mathbf{V_6}$	$\mathbf{V_7}$	$\mathbf{V_8}$
$\mathbf{J} \cap \mathbf{Inv}$						$\mathbf{J} \cap \mathbf{Inv}$	$\mathbf{J} \cap \mathbf{Inv}$			
N							**N**	**K**	**D**	$\mathcal{L}\mathbf{I}$
K								**K**	$\mathcal{L}\mathbf{I}$	$\mathcal{L}\mathbf{I}$
D									**D**	$\mathcal{L}\mathbf{I}$
$\mathcal{L}\mathbf{I}$										$\mathcal{L}\mathbf{I}$
Sl										
B										
$\mathbf{K_1}$										
$\mathbf{D_1}$										
$\mathbf{LI_1}$										
Ab			$(*)$ [10]		$(*)$ [8]					
$\mathbf{R_{Com}}$										
$\mathbf{L_{Com}}$										
Perm										
CS					$(*)$ [8]					
CR			$(*)$ [10]				$\mathbf{V_9}$	$\mathbf{V_{10}}$	$\mathbf{V_{11}}$	$\mathbf{V_{12}}$
$\mathcal{M}\mathbf{K}$	$\mathbf{V_{13}}$								$\mathbf{V_{14}}$	
$\mathcal{M}\mathbf{N}$							$(*)$	$\mathbf{V_{15}}$		

$\vee$	**Sl**	**B**	$\mathbf{K_1}$	$\mathbf{D_1}$	$\mathbf{LI_1}$	**Ab**	**Com**	$\mathbf{R_{Com}}$	$\mathbf{L_{Com}}$	**Perm**
G	$\mathbf{V_{16}}$	$\mathbf{V_{17}}$	$\mathbf{V_{18}}$	$\mathbf{V_{19}}$	$\mathbf{V_{20}}$	**G**	**ZE**			
A	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**					
R	**R**		**R**	$a)$	$a)$					
L	**L**		$a)$	**L**	$a)$					
J	**J**	$(*), (**)$[31]	$\mathbf{V_{21}}$	$\mathbf{V_{22}}$	$\mathbf{V_{23}}$		$b)$	$b)$	$b)$	$b)$
$\mathbf{J} \cap \mathbf{Inv}$	$\mathbf{J} \cap \mathbf{Inv}$									
N	$\mathbf{V_{24}}$	$\mathbf{V_{25}}$				$\mathbf{V_{26}}$	$\mathbf{V_{27}}$	$\mathbf{R_{Com}}$	$\mathbf{L_{Com}}$	**Perm**
K	$\mathbf{V_{28}}$	$\mathbf{V_{29}}$	**K**	$b)$	$b)$	$\mathbf{V_{30}}$	$\mathbf{L_{Com}}$	**Perm**	$\mathbf{L_{Com}}$	**Perm**
D	$\mathbf{V_{31}}$	$\mathbf{V_{32}}$	$b)$	**D**	$b)$	$\mathbf{V_{33}}$	$\mathbf{R_{Com}}$	$\mathbf{R_{Com}}$	**Perm**	**Perm**
$\mathcal{L}\mathbf{I}$	$\mathbf{V_{34}}$	$\mathbf{V_{35}}$	$\mathcal{L}\mathbf{I}$	$\mathcal{L}\mathbf{I}$	$\mathcal{L}\mathbf{I}$	$\mathbf{V_{36}}$	**Perm**	**Perm**	**Perm**	**Perm**
Sl	**Sl**	**B**	$\mathbf{V_{37}}$	$\mathbf{V_{38}}$	$\mathbf{V_{39}}$	$\mathbf{V_{40}}$	**Com**	$\mathbf{R_{Com}}$	$\mathbf{L_{Com}}$	**Perm**
B		**B**	**B**	**B**	**B**					
$\mathbf{K_1}$			$\mathbf{K_1}$	$\mathbf{LI_1}$	$\mathbf{LI_1}$	$c)$				**Perm**
$\mathbf{D_1}$				$\mathbf{D_1}$	$\mathbf{LI_1}$	$c)$				**Perm**
$\mathbf{LI_1}$					$\mathbf{LI_1}$	$c)$				**Perm**
Ab						**Ab**	**Com**	$\mathbf{R_{Com}}$	$\mathbf{L_{Com}}$	**Perm**
Com							**Com**	$\mathbf{R_{Com}}$	$\mathbf{L_{Com}}$	**Perm**
$\mathbf{R_{Com}}$								$\mathbf{R_{Com}}$	**Perm**	**Perm**
$\mathbf{L_{Com}}$									$\mathbf{L_{Com}}$	**Perm**
Perm										**Perm**
CS										
CR										
$\mathcal{M}\mathbf{K}$										

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{V_1} & = & [\![x^\omega = y^\omega]\!] \;\; ver \;\; sec \;\; 4.2 \\
\mathbf{V_2} & = & [\![x^\omega y^\omega = x^\omega]\!] \;\; ver \;\; sec \;\; 4.2 \\
\mathbf{V_3} & = & [\![y^\omega x^\omega = x^\omega]\!] \;\; ver \;\; sec \;\; 4.2 \\
\mathbf{V_4} & = & [\![x^\omega y^\omega x^\omega = x^\omega]\!] \;\; ver \;\; sec \;\; 4.2 \\
\mathbf{V_5} & = & [\![(xy)^\omega x(zx)^\omega = (xy)^\omega (zx)^\omega]\!] \;\; [15] \\
\mathbf{V_6} & = & [\![a^\omega x(yz)^\omega = a^\omega x(zy)^\omega, x^\omega = x^{\omega+1}]\!] \;\; [5] \\
\mathbf{V_7} & = & [\![(yz)^\omega x a^\omega = (zy)^\omega x a^\omega, x^\omega = x^{\omega+1}]\!] \;\; [5] \\
\mathbf{V_8} & = & [\![a^\omega b(cd)^\omega e f^\omega = a^\omega b(dc)^\omega e f^\omega, a^\omega = a^{\omega+1}]\!] \;\; [16] \\
\mathbf{V_9} & = & [\![(ab)^{\omega+1} = a^{\omega+1} b^{\omega+1}]\!] \;\; [5] \\
\mathbf{V_{10}} & = & [\![a^\omega b = a^\omega b^{\omega+1}, b a^\omega = (b a^\omega)^{\omega+1}]\!] \;\; ver \;\; sec \;\; 4.3 \\
\mathbf{V_{11}} & = & [\![b a^\omega = b^{\omega+1} a^\omega, a^\omega b = (a^\omega b)^{\omega+1}]\!] \;\; ver \;\; sec \;\; 4.3 \\
\mathbf{V_{12}} & = & [\![a^\omega b c^\omega = a^\omega b^{\omega+1} c^\omega, a b^\omega c = (a b^\omega c)^{\omega+1}]\!] \;\; ver \;\; sec \;\; 4.3 \\
\mathbf{V_{13}} & = & [\![x^\omega y x^\omega = x^\omega y]\!] \;\; [17] \\
\mathbf{V_{14}} & = & [\![a^\omega b a^\omega c d^\omega = a^\omega b c d^\omega, a^\omega = a^{\omega+1}]\!] \;\; [17] \\
\mathbf{V_{15}} & = & [\![a^\omega b^\omega c = a^\omega c b^\omega, a^\omega = a^{\omega+1}]\!] \;\; [5] \\
\mathbf{V_{16}} & = & [\![(xy)^\omega = x^\omega y^\omega = (yx)^\omega, x^\omega = x^{\omega+1}]\!] \;\; [5] \\
\mathbf{V_{17}} & = & [\![(xy)^\omega = x^\omega y^\omega, x^\omega = x^{\omega+1}]\!] \;\; [5] \\
\mathbf{V_{18}} & = & [\![x y^\omega = x]\!] \;\; [32] \\
\mathbf{V_{19}} & = & [\![y^\omega x = x]\!] \;\; [32] \\
\mathbf{V_{20}} & = & [\![x y^\omega x^\omega = x = x^\omega y^\omega x]\!] \;\; [32] \\
\mathbf{V_{21}} & = & [\![x(yz)^\omega = x(zy)^\omega, x^{\omega+1} = x^\omega]\!] \;\; [32] \\
\mathbf{V_{22}} & = & [\![(yz)^\omega x = (zy)^\omega x, x^{\omega+1} = x^\omega]\!] \;\; [32] \\
\mathbf{V_{23}} & = & [\![x(yz)^\omega t = x(zy)^\omega t, x^{\omega+1} = x^\omega]\!] \;\; [32] \\
\mathbf{V_{24}} & = & (\mathbf{N} \vee \mathbf{B}) \cap \mathbf{ZE} \;\; [31] \\
\mathbf{V_{25}} & = & [\![x^\omega y = (xy)^\omega = x y^\omega]\!] \;\; [33] \\
\mathbf{V_{26}} & = & [\![x^\omega = y^\omega, x^\omega y = y x^\omega, x^\omega y z = x^\omega z y]\!] \;\; [5] \\
\mathbf{V_{27}} & = & [\![x^\omega y = y x^\omega, x^{\omega+1} = x^\omega]\!] \;\; [12] \\
\mathbf{V_{28}} & = & (\mathbf{K} \vee \mathbf{B}) \cap \mathbf{L_{Com}} \;\; [31] \\
\mathbf{V_{29}} & = & [\![x^\omega y = x^\omega y^2, x y^\omega z = (x y^\omega z)^2]\!] \;\; ver \;\; sec \;\; 4.3 \\
\mathbf{V_{30}} & = & [\![x^\omega y^\omega = x^\omega, x^\omega y z = x^\omega z y]\!] \;\; [15] \\
\mathbf{V_{31}} & = & (\mathbf{D} \vee \mathbf{B}) \cap \mathbf{R_{Com}} \;\; [31] \\
\mathbf{V_{32}} & = & [\![y x^\omega y = y^2 x^\omega, x y^\omega z = (x y^\omega z)^2]\!] \;\; ver \;\; sec \;\; 4.3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{V_{33}} & = & [\![x^\omega y^\omega = y^\omega, yzx^\omega = zyx^\omega zy]\!] \ \ [15] \\
\mathbf{V_{34}} & = & (\mathcal{L}\mathbf{I} \vee \mathbf{B}) \cap \mathbf{Perm} \ \ [31] \\
\mathbf{V_{35}} & = & [\![xy^\omega z = (xy^\omega z)^2]\!] \ \ ver \ \ sec \ \ 4.3 \\
\mathbf{V_{36}} & = & [\![x^\omega y^\omega = x^\omega, x^\omega yzt^\omega = x^\omega zyt^\omega]\!] \ \ [15] \\
\mathbf{V_{37}} & = & [\![xyz = xzy, x^2 = x]\!] \ \ [32] \\
\mathbf{V_{38}} & = & [\![yzx = zyx, x^2 = x]\!] \ \ [32] \\
\mathbf{V_{39}} & = & [\![xyzx = xzyx, x^2 = x]\!] \ \ [32] \\
\mathbf{V_{40}} & = & [\![xy = yx, x^\omega = x]\!] \ \ [32]
\end{array}
$$

(*) Estas pseudovariedades são decidíveis.

(**) Estas pseudovariedades não são finitamente baseadas.

a) Estas pseudovariedades são apenas conjecturas [32]:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{R} \vee \mathbf{D_1} & = & \mathbf{R} \vee \mathbf{LI_1} = [\![(xy)^\omega xz = (xy)^\omega z]\!] \\
\mathbf{L} \vee \mathbf{K_1} & = & \mathbf{L} \vee \mathbf{LI_1} = [\![zx(yx)^\omega = z(yx)^\omega]\!] \\
\mathbf{K} \vee \mathbf{D_1} & = & \mathbf{K} \vee \mathbf{LI_1} = [\![x^\omega yz = x^\omega z]\!] \\
\mathbf{D} \vee \mathbf{K_1} & = & \mathbf{D} \vee \mathbf{LI_1} = [\![zyx^\omega = zx^\omega]\!]
\end{array}
$$

b) ver Azevedo [16].

c) Seja $\overline{\mathbf{Ab}}$ a pseudovariedade de todos os monóides cujos subgrupos pertencem a **Ab**.

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{Ab} \vee \mathbf{D_1} & = & (\mathbf{G} \vee \mathbf{D_1}) \cap \overline{\mathbf{Ab}} \\
\mathbf{Ab} \vee \mathbf{K_1} & = & (\mathbf{G} \vee \mathbf{K_1}) \cap \overline{\mathbf{Ab}} \\
\mathbf{Ab} \vee \mathbf{LI_1} & = & (\mathbf{G} \vee \mathbf{LI_1}) \cap \overline{\mathbf{Ab}}
\end{array}
$$

Referências Bibliográficas

[1] D. Albert, R. Baldinger e J. Rhodes. Undecidability of the identity problem for finite semigroups, *J. Symbolic Logic* **57** (1992) 179-192.

[2] J. Almeida. Some pseudovariety joins involving the pseudovariety of finite groups, *Semigroup Forum* **37** (1988) 53-57.

[3] J. Almeida. On the membership problem for pseudovarieties of commutative semigroups, *Semigroup Forum* **42** (1991) 47-51.

[4] J. Almeida. The algebra of implicit operations, *Algebra Universalis* **26** (1989) 16-72.

[5] J. Almeida. *Finite Semigroups and Universal Algebra*, World Scientific, Singapore, 1994.

[6] J. Almeida e A. Azevedo. Implicit operations on certain classes of semigroups, em S. Goberstein e P. Higgins (Eds.), Proc of Chico Conf, *Semigroups and their applications*, D. Reidel (1987) 1-11.

[7] J. Almeida e A. Azevedo. The join of the pseudovarieties of $\mathcal{R}$-trivial e $\mathcal{L}$-trivial semigroups, *J. Pure and Applied Algebra* **60** (1989) 129-137.

[8] J. Almeida, A. Azevedo e M. Zeitoun. Pseudovariety joins involving the $\mathcal{J}$-trivial e completely regular semigroups, *Int. J. Algebra and Computation* **9** (1999) 99-112.

[9] J. Almeida, M. Delgado. Tameness of the pseudovariety of abelian groups, *Int. J. Algebra and Computation*, a publicar.

[10] J. Almeida, J. C. Costa e M. Zeitoun. Tameness of pseudovariety joins involving **R**, Monatshefte für Mathematik, a publicar.

[11] J. Almeida e M. Zeitoun. Tameness of some locally trivial pseudovarieties, *Comumunications in Algebra* **31** (2003) 61-77.

[12] J. Almeida e P. Weil. Reduced factorization in free profinite groups and join decomposition of pseudovarieties, *Int. J. Algebra and Computation* **4** (1994) 375-403.

[13] J. Almeida e B. Steinberg. On the decidability of iterated semidirect products and applications to complexity, Proc. London Math Soc. **80** (2000) 50-47.

[14] C. J. Ash. Inevitable graphs: a proof of the type II conjecture and some related decision procedures, *Int. J. Algebra and Computation* **1** (1991) 127-146.

[15] A. Azevedo. *Operações implícitas sobre pseudovariedades de semigrupos. Aplicações*. Tese de Doutoramento, Universidade do Porto, 1989.

[16] A. Azevedo. The join of the pseudovarieties **J** with permutative pseudovarieties, em Almeida e al.(Eds.)*Lattices, Semigroups and Universal Algebra*, Plenum, New York (1990) 1-11.

[17] A. Azevedo e M. Zeitoun. Three examples of join computations, *Semigroup Forum* **57** (1998) 249-277.

[18] H. Clifford, G. Preston. The algebraic theory of semigroups, vol 1, *Mathematical Surveys of the American Mathematical Society* **7** Providence, R.I. (1961).

[19] J. C. Costa. Some pseudovariety joins involving locally trivial semigroups, *Semigroup Forum* **64** (2002) 12-28.

[20] J. C. Costa. Pseudovariedades da forma $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{W}$. Trabalho de síntese apresentado às "Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica", Universidade do Minho, 1993.

[21] J. C. Costa. Quelques intersections de variétés de semigroupes finis et de variétés de langages, opérations implicites. Tese de Doutoramento, Universidade de Paris 6, 1998.

[22] J. C. Costa e M. L. Teixeira. Tameness of the pseudovariety **LSl**, *Int. J. Algebra and Computation* **14** (2004) 627-654.

[23] J. C. Costa. Tópicos de Álgebra, Manuscrito, Universidade do Minho, 2004.

[24] S. Eilenberg. *Automata, Languages and Machines*,Vol. B, Academic Press, New York, 1976.

[25] J. Howie. *An Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press, London, 1976.

[26] J.E. Pin. *Variétés de langages formels*, Masson, Paris, 1984.

[27] J. Reiterman. The Birkhoff theorem for finite algebras, *Algebra Universalis* **14** (1982) 1-10.

[28] B. Steinberg. On pointlike sets and joins of pseudovarieties, *Int. J. Algebra and Computation* **8** (1998) 203-231.

[29] P. Trotter e M. Volkov. The finite basis problem in the pseudovariety joins of aperiodic semigroups with groups, *Semigroup Forum* **52** (1996) 83-91.

[30] P. Vieira. Palavras finitas e infinitas. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, 2003.

[31] M. Volkov. On a class of semigroup pseudovarieties without finite pseudoidentity basis, *Int. J. Algebra and Computation* **5** (1995) 127-135.

[32] M. Zeitoun. On the join of two pseudovarieties, em J. Almeida, G.M. Gomes e P.V. Silva (Eds.), *Semigroups, Automata and Languages*, World Scientific, (1996) 281-288.

[33] M. Zeitoun. The join of the pseudovarieties of idempotent semigroups and locally trivial semigroups, *Semigroup Forum* **52** (1996) 249.

[34] M. Zeitoun. On the decidability of the membership problem of the pseudovariety $\mathbf{J} \vee \mathbf{B}$, *Int. J. Algebra and Computation* **5** (1995) 47-64.

Índice Remissivo